Pavages autosimilaires du plan

et quasi-cristaux.

Yves Meyer


Aun aprendo
54

Le but de cet exposé est:

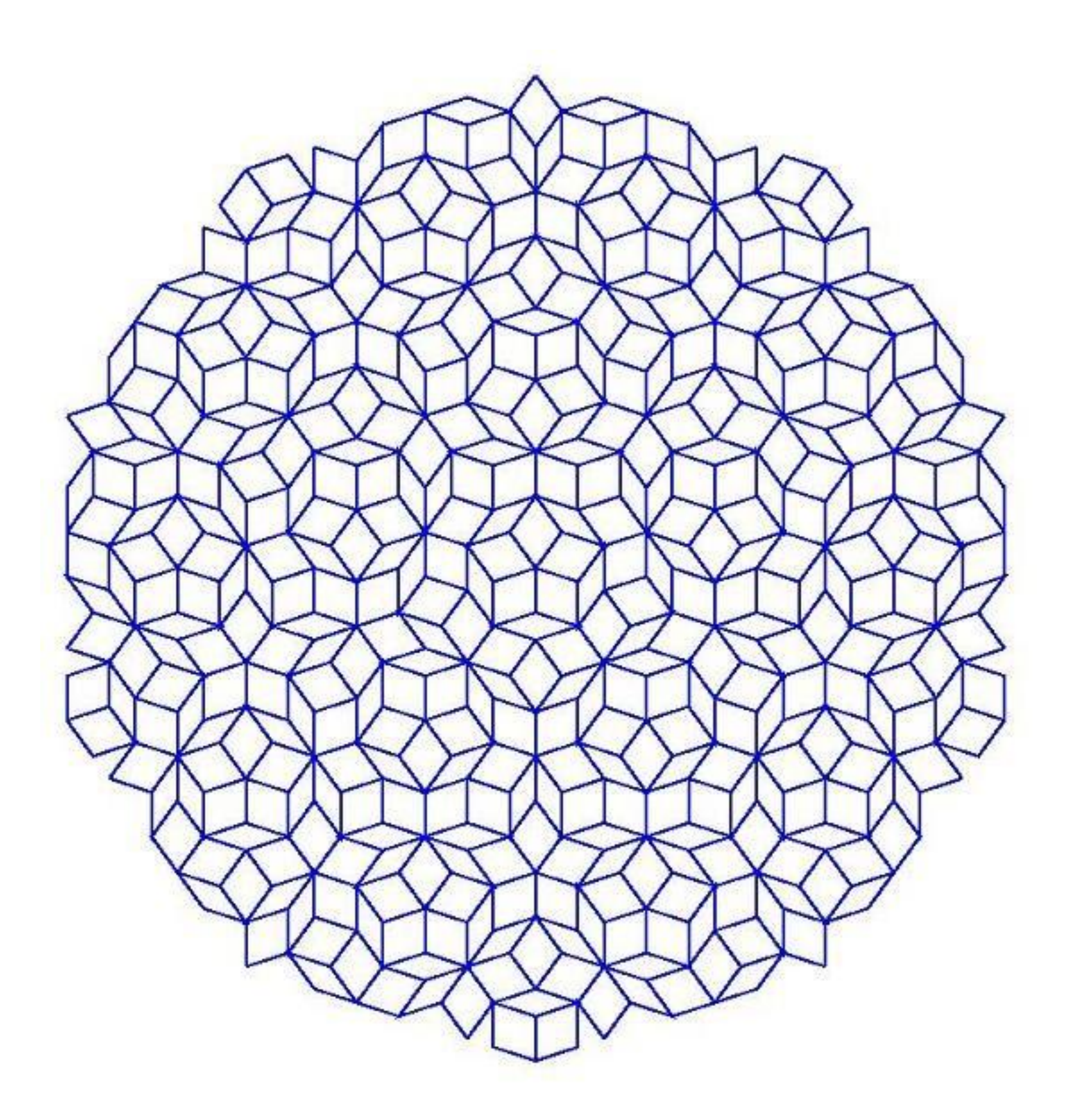
(1) de construire des pavages du plan invariants par rotation d'angle $2\pi/5$ (comme le pavage de Penrose)

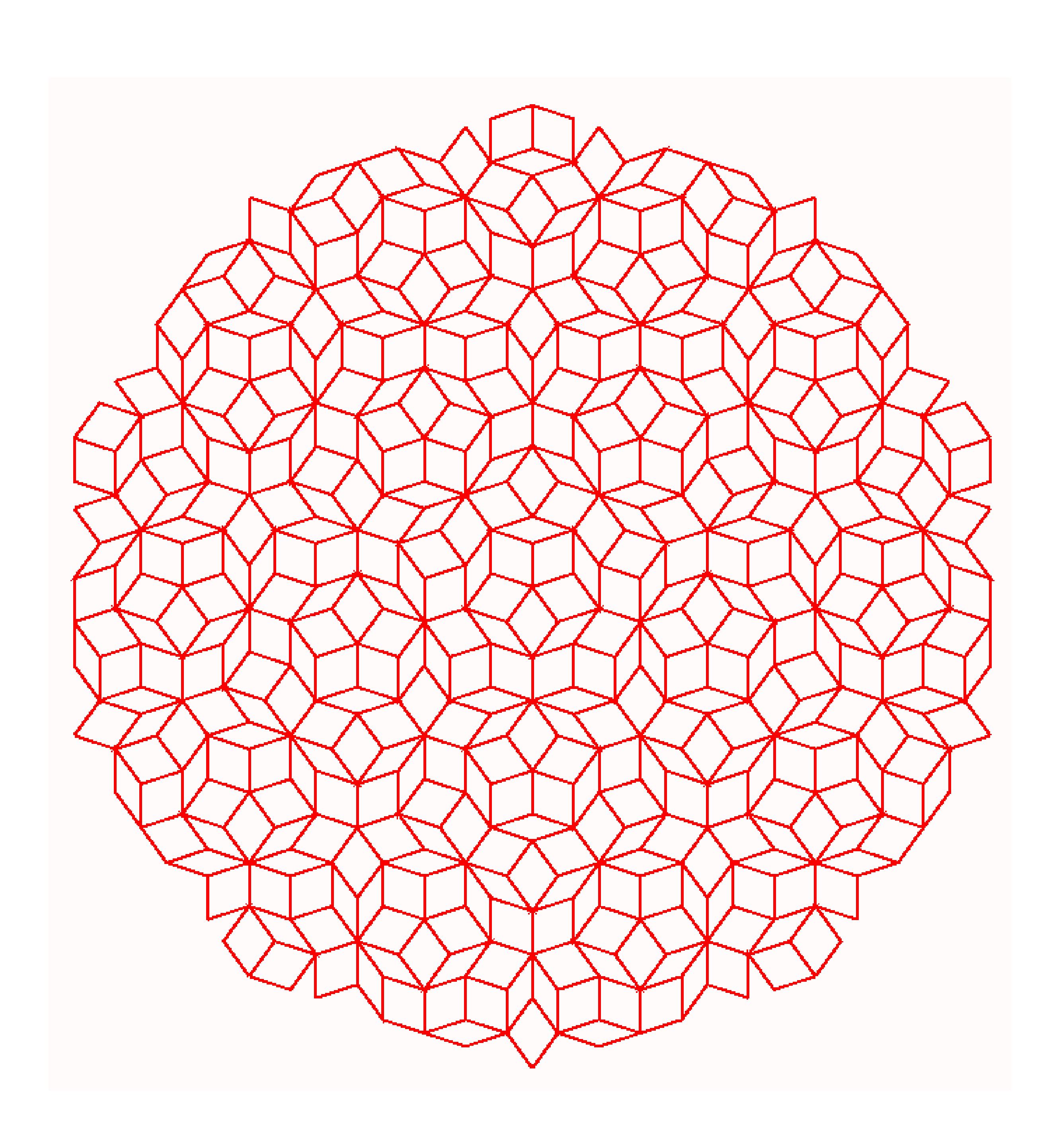
(2) de répondre à la question suivante : ces pavages sont-ils des *quasi-cristaux* ou des structures plus complexes ?

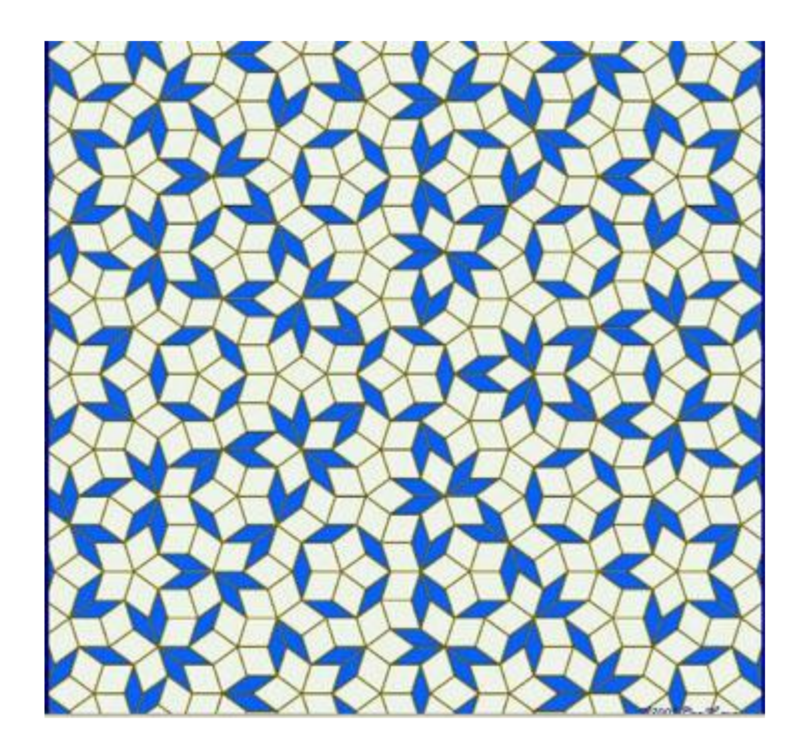
L'*autosimilarité* du pavage de Penrose fournit la clé de ces constructions.

Un quasi-cristal est-il un pavage ou un ensemble de points ?

1. Pavages de Penrose







Penrose, Roger (1974)

Role of aesthetics in pure and applied research.

(a) Le pavage de Penrose est *invariant par rotation* d'angle $2\pi/5$ autour de 0.

(b) Le pavage de Penrose est de *type fini*.

(c) Le pavage de Penrose est *répétitif*.

(d) Le pavage de Penrose est *auto-similaire* (en un sens qui sera précisé).

(e) L'ensemble Λ des sommets du pavage de Penrose est un "model set" (N. G. de Bruijn, 1981). L'image de diffraction de Λ est invariante par rotation de $2\pi/5$, tout comme les images de diffraction obtenues par D. Shechtman (prix Nobel de Chimie, 2011).

Théorème 1.1. *Le pavage de Penrose a une infinité non dénombrable de variantes qui ont les propriétés (a) et (b) mais n'ont pas la propriété (e).*

Corollaire 1.1. *Les pavages du plan à l'aide de deux losanges et ayant la symétrie pentagonale peuvent fort bien ne pas être des quasi-cristaux.*

2. Pavages de type fini

Paver le plan à l'aide d'un nombre fini M de *proto-tuiles* est un problème qui avait déjà fasciné Johannes Kepler (Harmonia Mundi).

Définition 1. *Un pavage de type fini $\mathcal{P}$ du plan est une collection de tuiles T_j, $j \in J$, ayant les propriétés suivantes :*

(1) *Le plan est la réunion des tuiles T_j, $j \in J$.*
(2) *Les frontières des tuiles T_j sont des polygones.*
(3) *Si $j \neq k$, l'intersection $T_j \cap T_k$ est vide ou bien cette intersection est un segment $I_{j,k}$ qui est alors l'un des côtés de T_j et aussi l'un des côtés de T_k.*

(4) *Chaque tuile T_j est la translatée $T_j = x_j + F_{m_j}$ d'une proto-tuile*

$$F_{m_j} \in \{F_1, \cdots, F_M\}.$$

On dira, par abus de langage, que les tuiles T_j, $j \in J$, composant $\mathcal{P}$ sont deux à deux disjointes.

On peut généraliser la définition 1 en modifiant (4). On demandera que $T_j = g_j(F_{m_j})$ où g_j est un déplacement et $F_{m_j} \in \{F_1, \cdots, F_M\}$.

Pour définir un pavage répétitif, on commence par définir les ensembles relativement denses (au sens de Besicovitch).

Un ensemble Λ de points de $\mathbb{R}^n$ est relativement dense s'il existe un $R > 0$ tel que toute boule de rayon R (quelque soit son centre) contienne un point $x \in \Lambda$.

Définition 2. *Un pavage $\mathcal{P}$ du plan est répétitif si, pour tout entier N et pour tout ensemble fini $\{T_1, \ldots, T_N\}$ composé de N tuiles appartenant à $\mathcal{P}$, l'ensemble des x tels que les tuiles translatées $x+T_k$, $1 \leq k \leq N$, appartiennent encore à $\mathcal{P}$ est relativement dense.*

Définition 3. *Soient* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *deux pavages du plan. On écrit* $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ *si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

(a) $\mathcal{Q}$ *est un raffinement de* $\mathcal{P}$ *: toute tuile de* $\mathcal{P}$ *est une réunion finie de tuiles de* $\mathcal{Q}$*.*

(b) *si deux tuiles* $T, T' \in \mathcal{P}$ *vérifient* $T' = g(T)$ *où* $g = g_{(T,T')}$ *est un déplacement du plan, alors pour chaque tuile* $S' \in \mathcal{Q}$ *apparaissant dans la décomposition de* T' *on a* $S' = g(S)$ *où* S *est l'une des tuiles qui apparaissent dans la décomposition de* T*.*

Un pavage du plan est *autosimilaire au sens strict* s'il existe un nombre réel ou complexe ζ, $|\zeta| > 1$, tel que $\zeta\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$.

Définition 4. *Un pavage $\mathcal{P}$ est autosimilaire au sens large s'il existe un nombre réel ou complexe ζ, $|\zeta| > 1$, tel que l'ensemble Λ des sommets des tuiles du pavage vérifie $\zeta\Lambda \subset \Lambda$.*

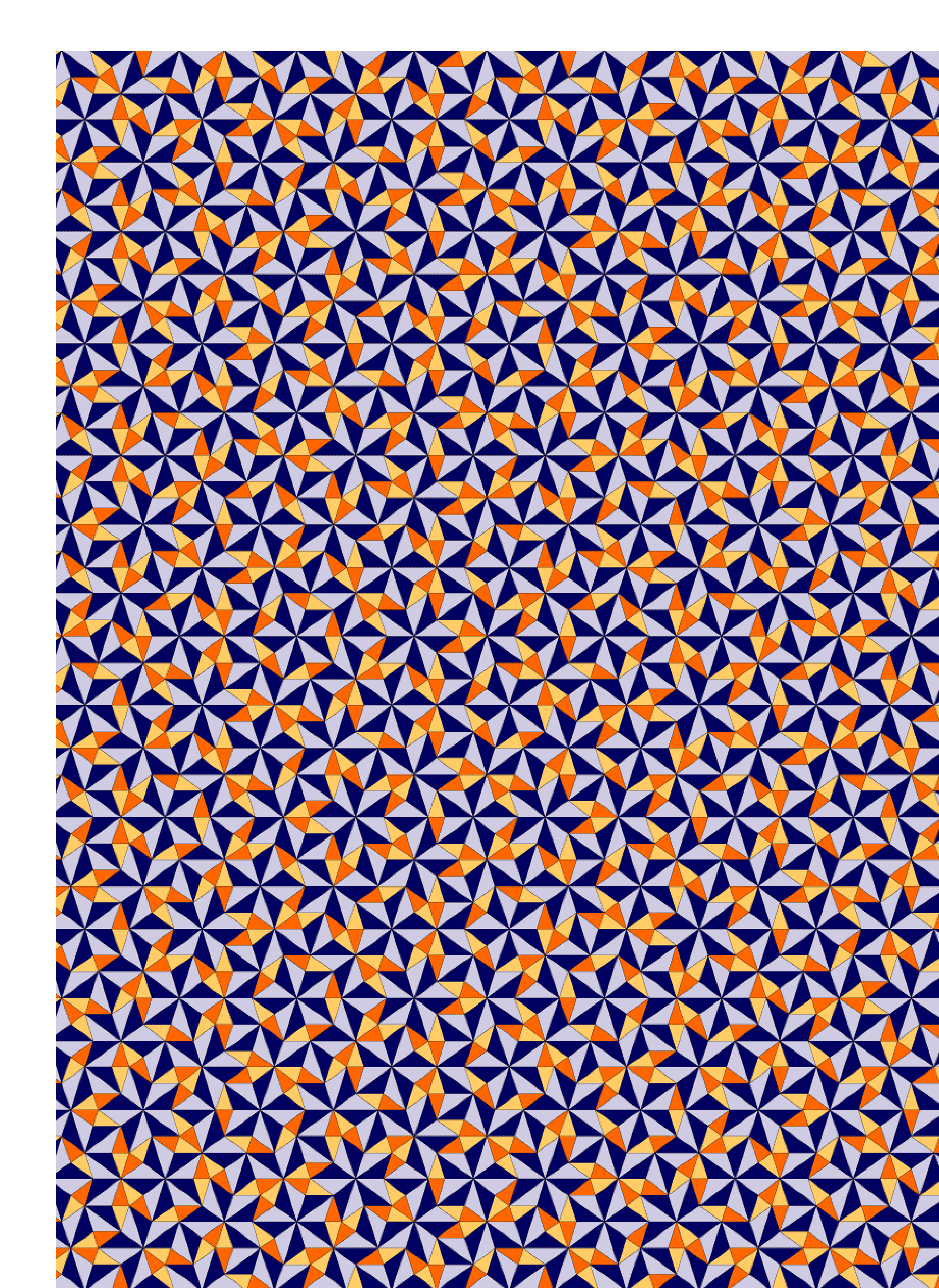
Un pavage $\mathcal{P}$ n'est pas déterminé de façon unique par l'ensemble Λ des sommets de ses tuiles et les deux notions d'autosimilarité diffèrent.

Théorème 2.1. *Le pavage de Penrose est autosimilaire au sens large avec $\zeta = \tau \exp(3\pi i/5)$.*

Ici $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

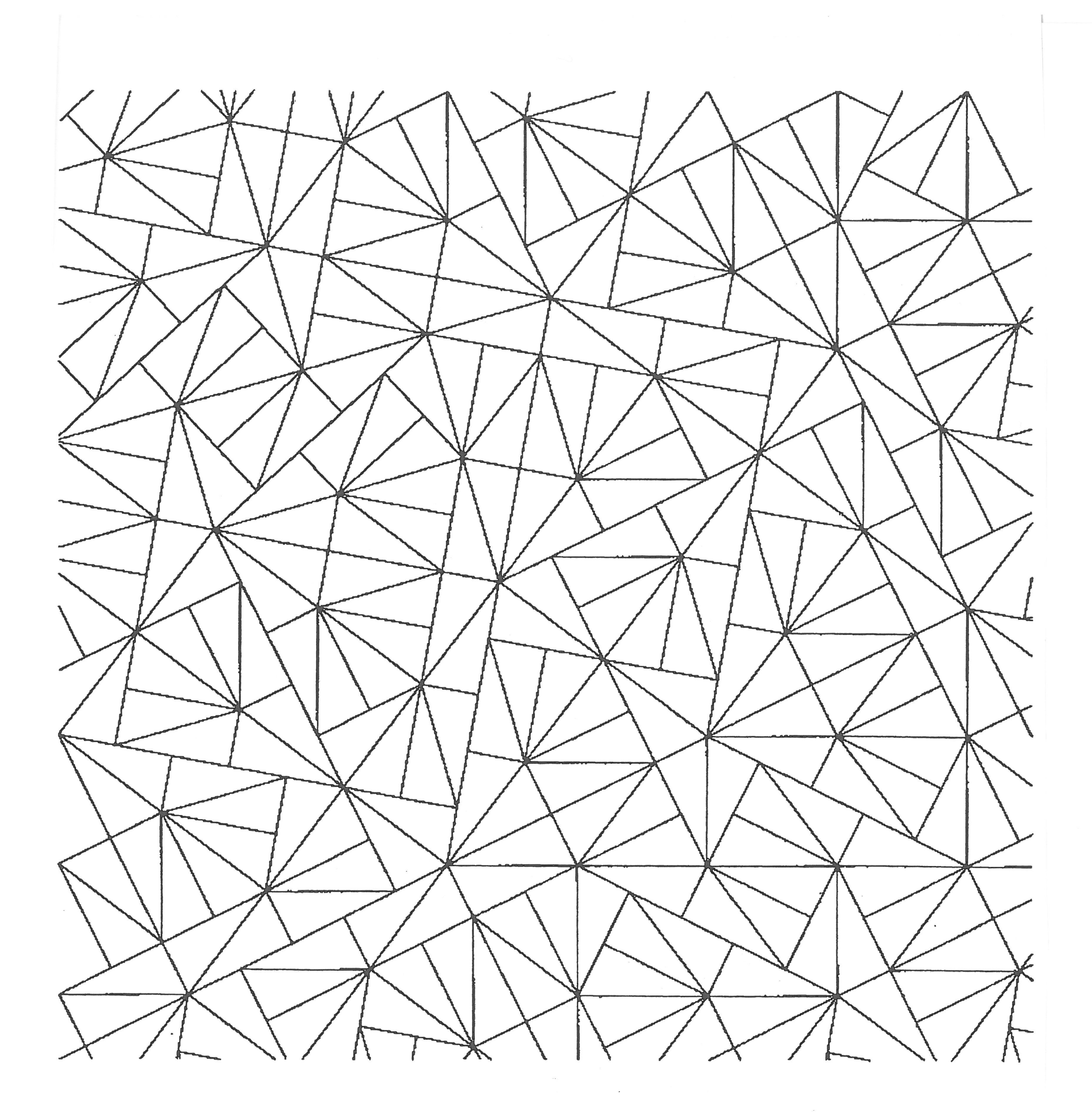
A l'aide des proto-tuiles utilisées dans le pavage de Penrose, nous construirons (section 5) un ensemble non dénombrable $\mathcal{R}$ de pavages $\mathcal{P}$ qui sont tous invariants par rotation d'angle $2\pi/5$. Certains de ces pavages ne sont pas des quasi-cristaux.

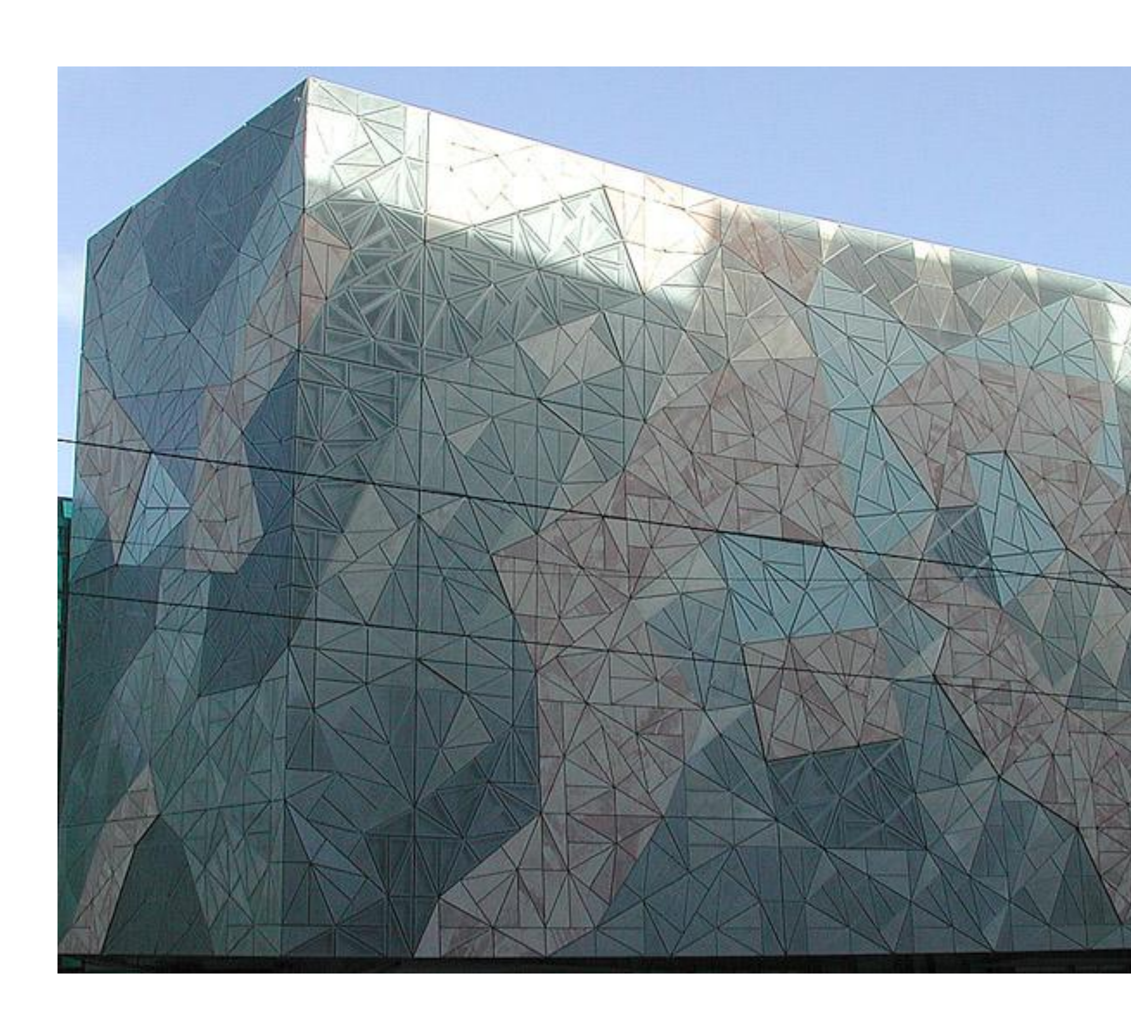
Cette construction débute par une modification du pavage de Penrose illustrée par la figure suivante. Chaque losange du pavage de Penrose est découpé en deux triangles isocèles.



3. Le pavage en moulin à vent (pinwheel tiling)

Le magnifique pavage qui figure sur la page suivante est le *pavage en moulin à vent*. Il a été créé par John Conway et Charles Radin (1994). Ce pavage est de type fini, sans être de type fini au sens strict et il n'est pas répétitif.

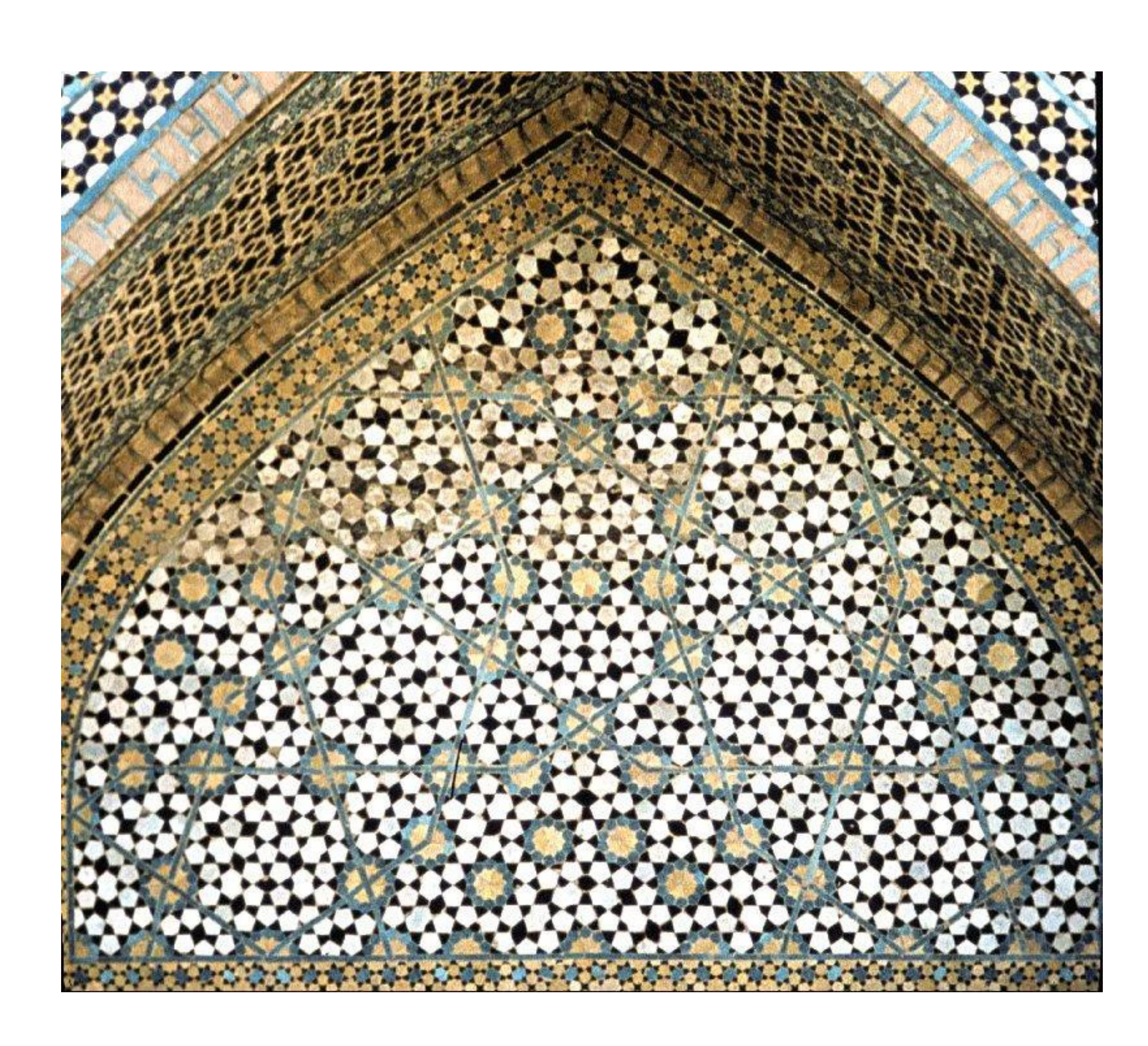




Federation Square, a building complex in Melbourne, Australia features the pin-wheel tiling.

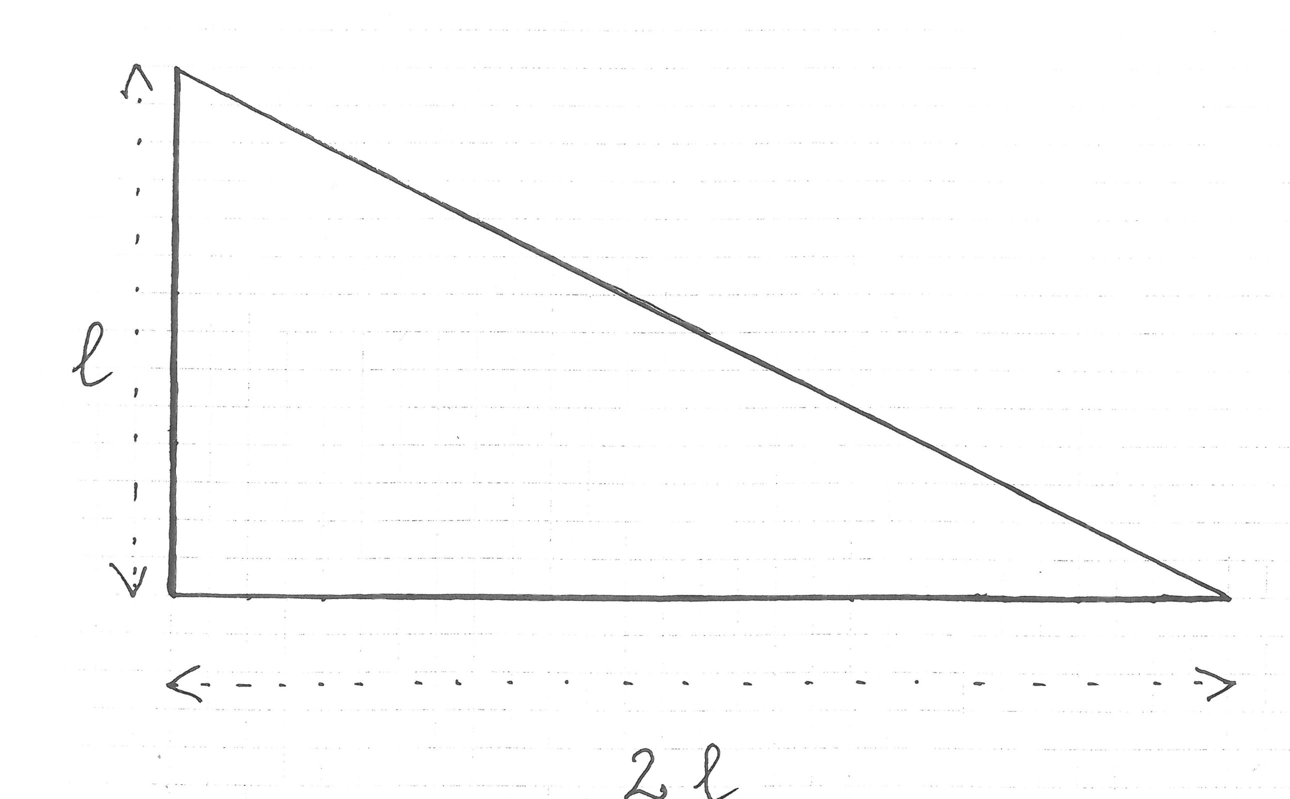


LAB architecture studio + Bates Smart: federation square, along flinders st- photography trevor mein

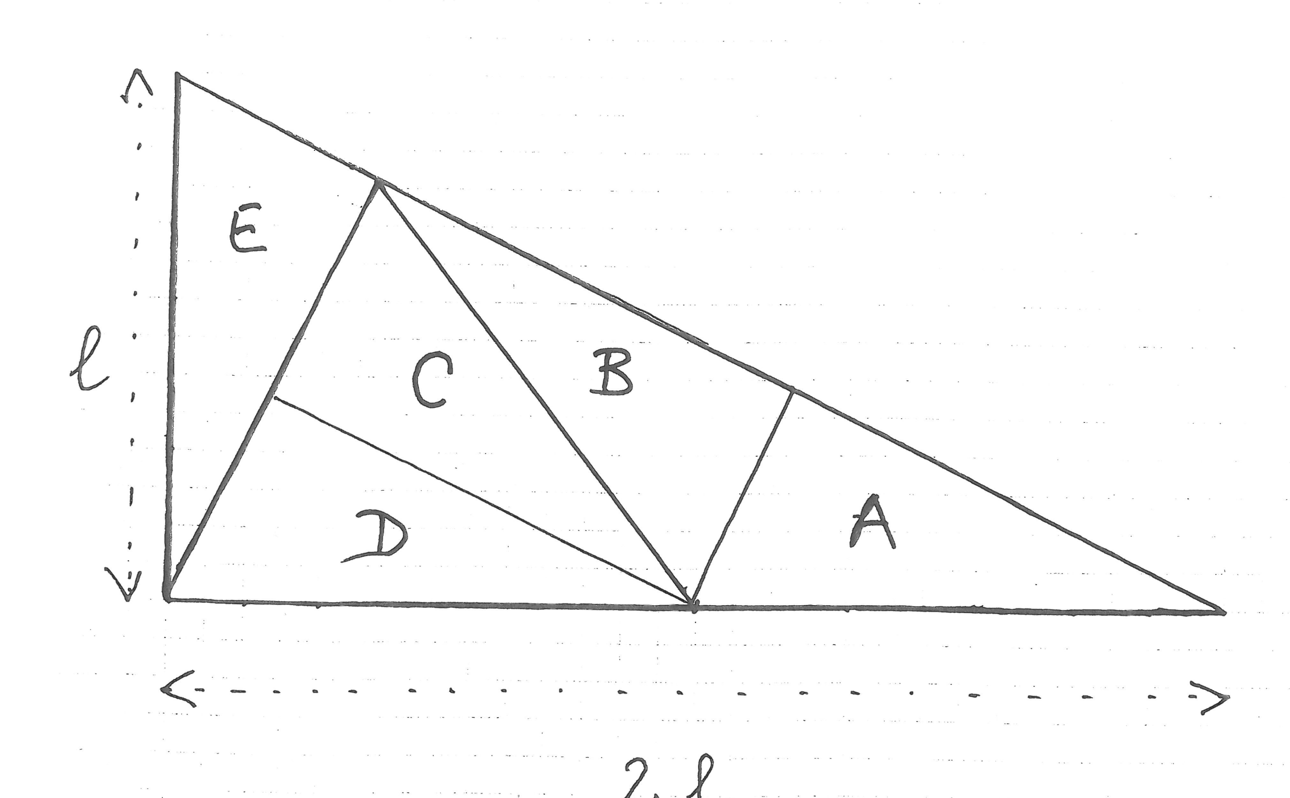


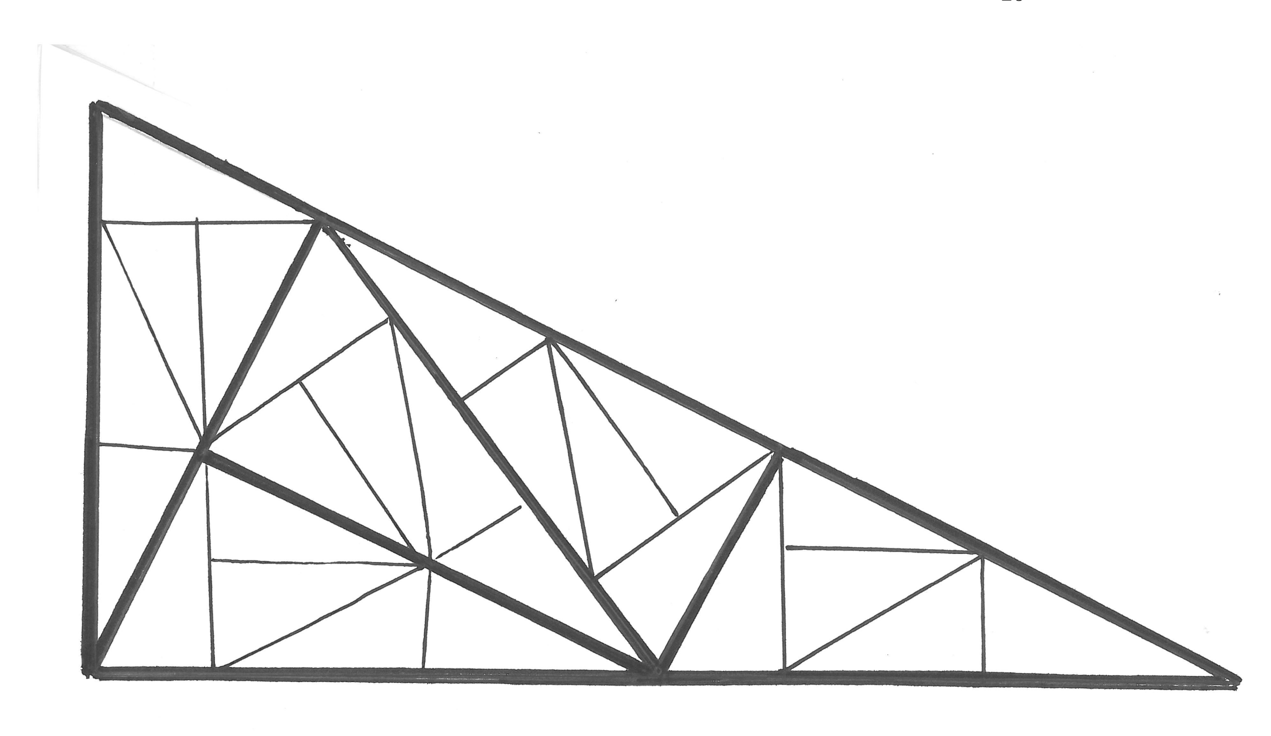
Pour construire le pavage en moulin à vent, on utilise une méthologie générale développée systématiquement par Gérard Rauzy sous le nom de “substitutions rules”.

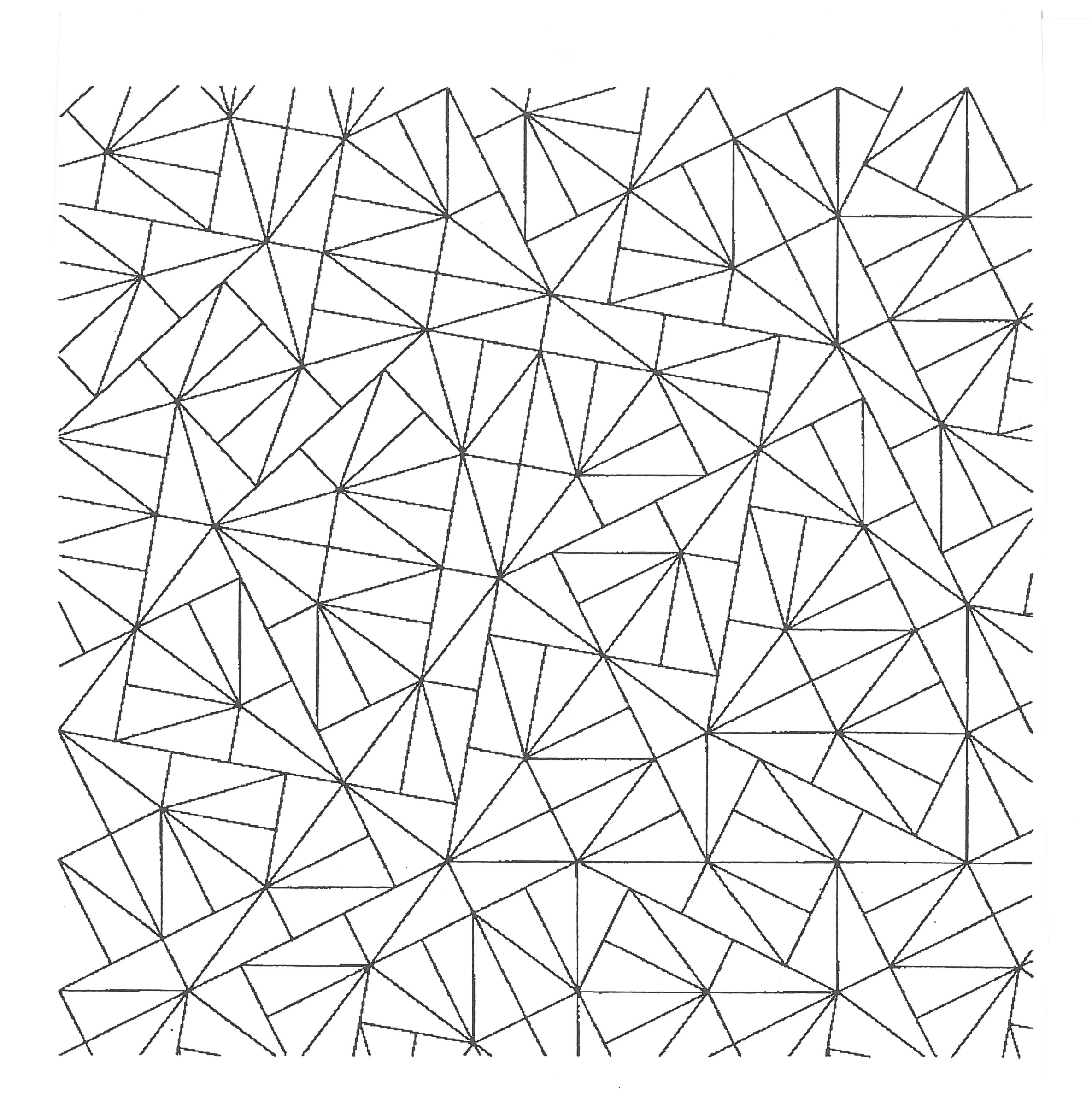
Divide this triangle into five isometrics triangles T_1, T_2, T_3, T_4, T_5

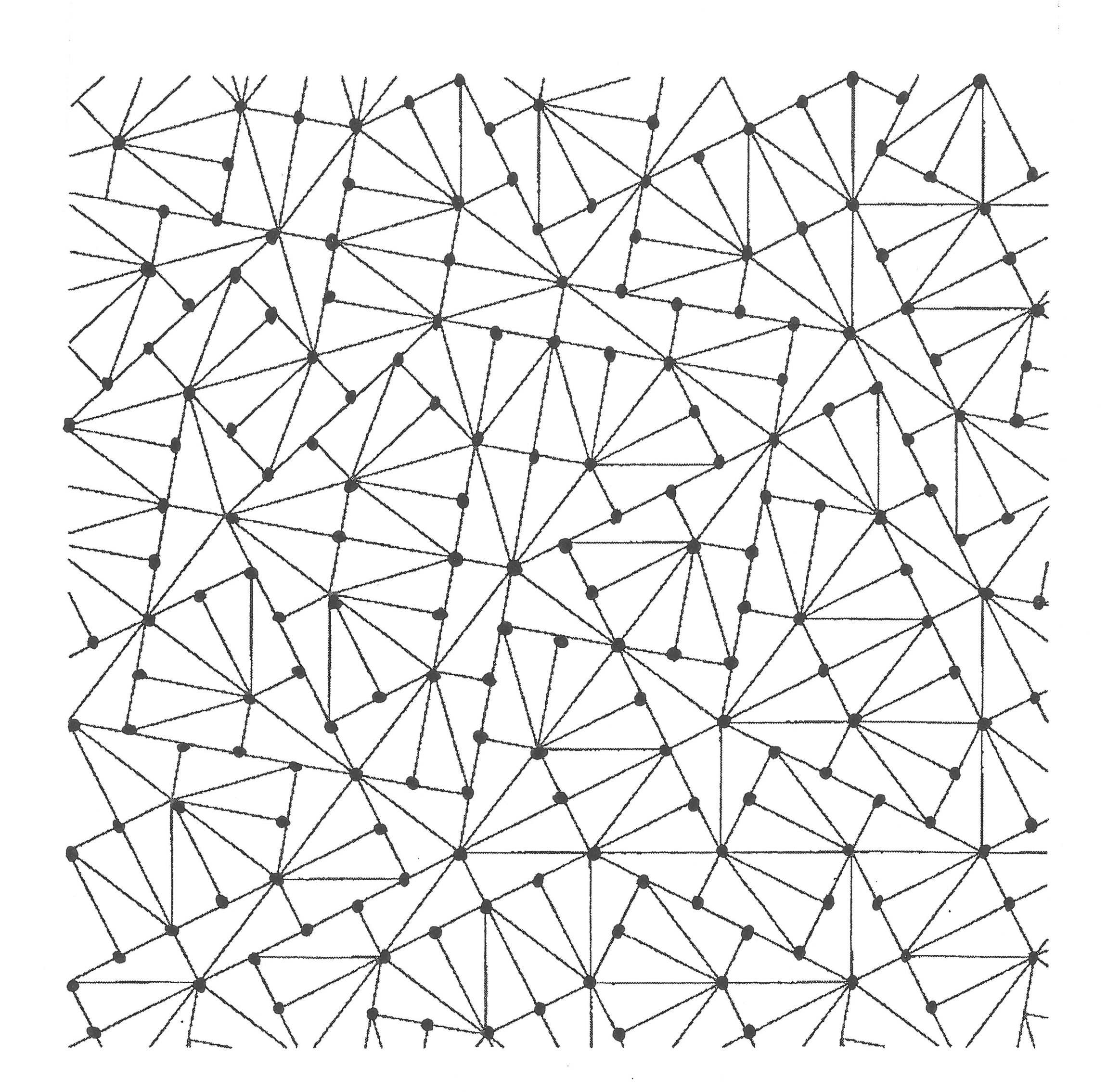


isometry : a translation followed by a rotation or a reflection


E
C
B
D
A
ℓ
2ℓ







On divise le triangle rectangle T de départ en cinq morceaux. Ces cinq morceaux A, B, C, D et E sont égaux. Plus précisément chaque morceau A, B, C, D, et E est isométrique à $5^{-1/2}T$. *Le morceau C sera appelé le cœur de T.* On itère cette décomposition sur chaque morceau A, B, C, D, et E. La suite des cœurs T_j, $j \geq 0$, est définie par $T_0 = T$, $T_1 = C$ et T_{j+1} est le cœur de T_j.

On continue et on itère N fois cette décomposition. Alors T est décomposé en 5^N triangles rectangles, tous égaux entre eux ; ce sont des copies isométriques de $5^{-N/2}T$. Le pavage de T par ces 5^N triangles rectangles est noté $\mathcal{P}_N$. Les cœurs associés T_N tendent vers le point $(1/2, 1/2)$.

On appelle S la similitude de centre $(1/2, 1/2)$, de rapport $\sqrt{5}$ et d'angle $\arg\tan(1/2)$. En utilisant les nombres complexes on a $S(z) = (2+i)z - i$.

Lemme 3.1. *On a*
$S(T_{N+1}) = T_N$ *et* $S^N(T_N) = T$.

On fait alors un zoom, c-à-d. on dilate la figure en utilisant les similitudes S^N. Le facteur d'agrandissement est $5^{N/2}$. On a alors évidemment $S^N(T_N) = T$. On obtient ainsi une suite croissante $S^N(\mathcal{P}_N)$ de pavages emboîtés qui convergent vers le pavage en moulin à vent $\mathcal{P}$. Cette magnifique construction est l'œuvre de John Conway et de Charles Radin.

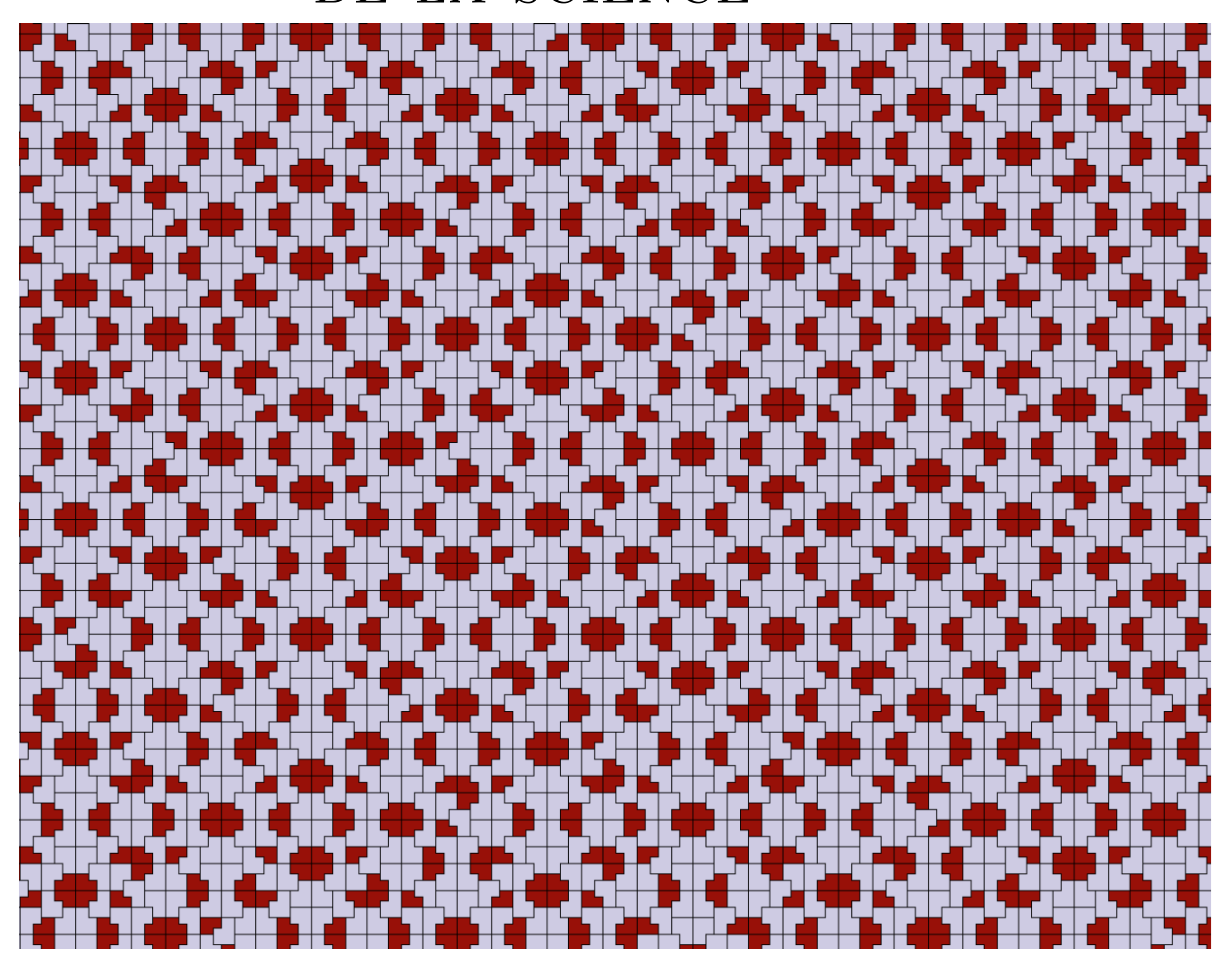
L'ensemble Λ des sommets d'un pavage jouera un rôle essentiel dans ce qui suit. Un sommet d'un pavage est simplement un sommet d'une des tuiles du pavage. Dans le cas du pavage de Conway-Radin, nous avons

$$(2+i)\Lambda \subset \Lambda + i$$

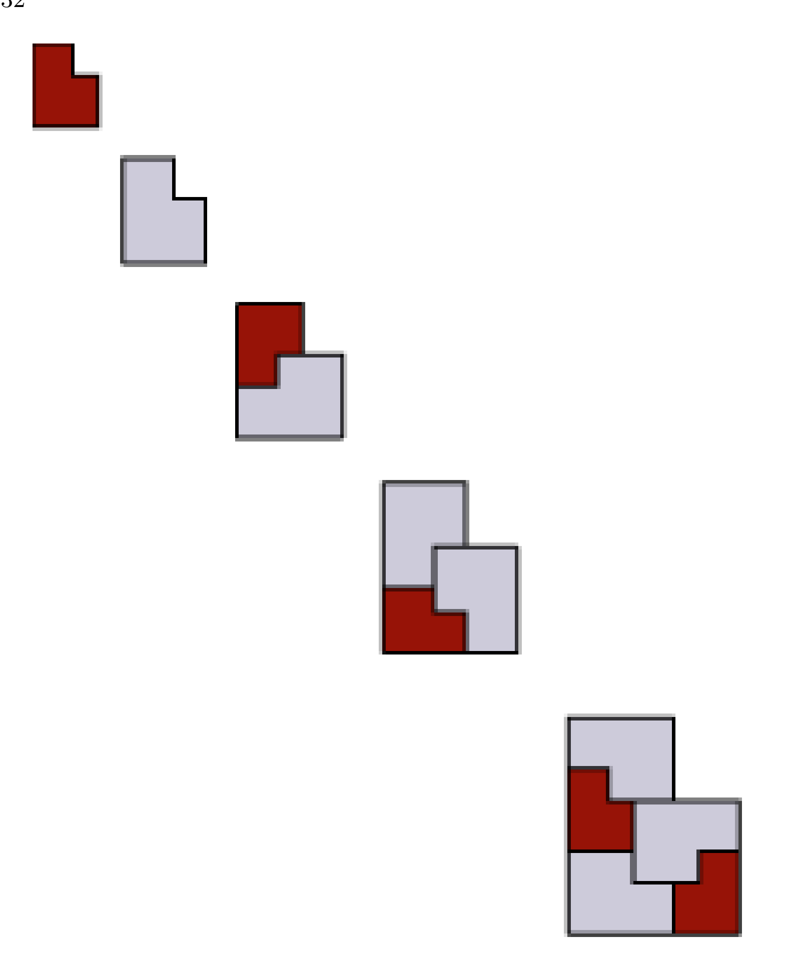
et ceci préfigure les propriétés d'autosimilarité des quasi-cristaux.

Mais Λ n'est pas un quasi-cristal. En effet Charles Radin démontra que l'ensemble des orientations des côtés des triangles composant $\mathcal{P}$ est infini.

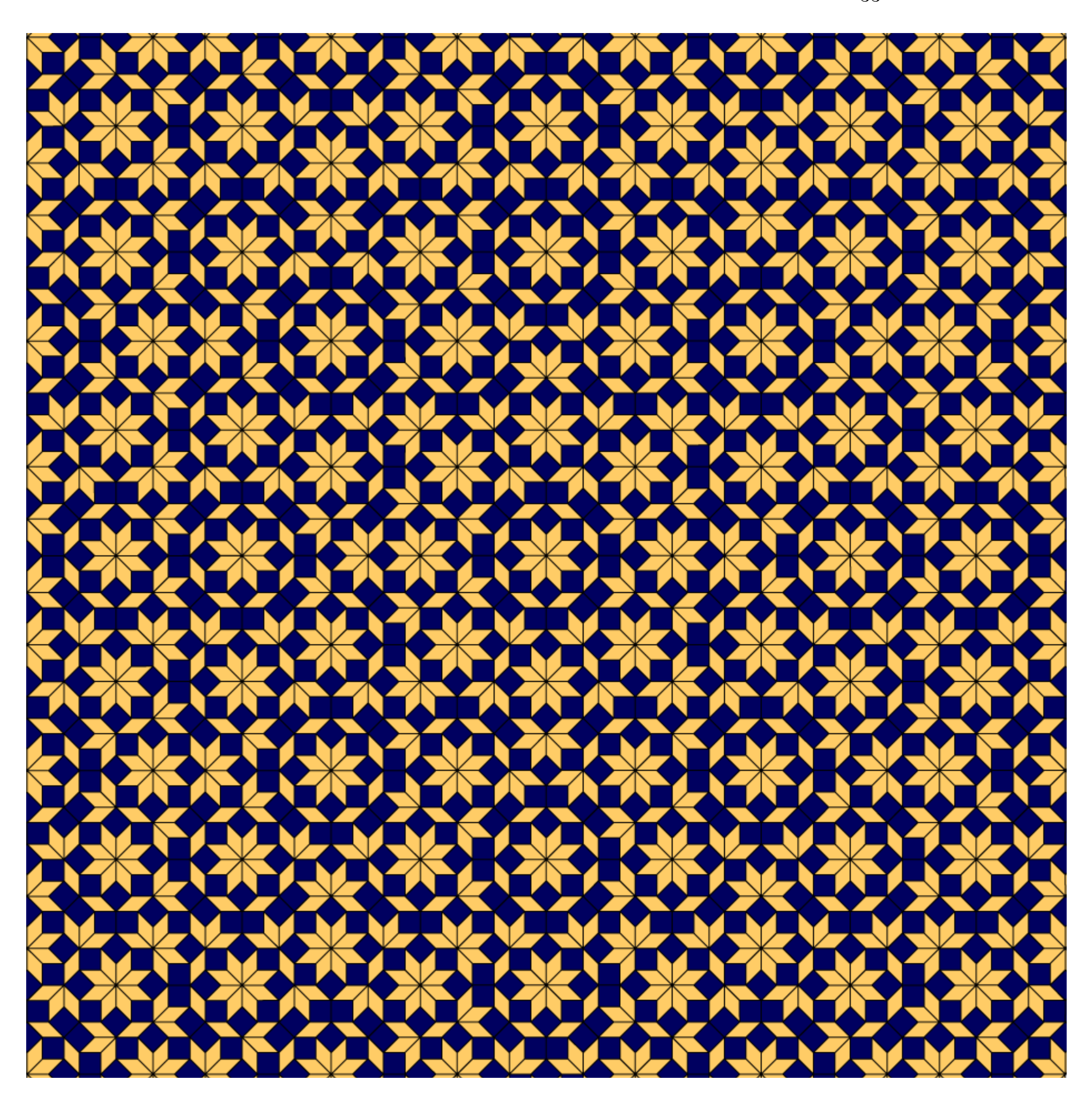
4. Robert Ammann, un oublié de la science



The set of vertices of the Ammann tiling
is a « Meyer set »



Il y a deux tuiles de base (la bleue et la rouge).
λ est la racine carrée du nombre d'or.
Les côtés de la tuile rouge sont,
en ordre décroissant, λ^5, λ^4, λ^3, λ^2, λ, 1.
La tuile bleue est λ fois plus grande.



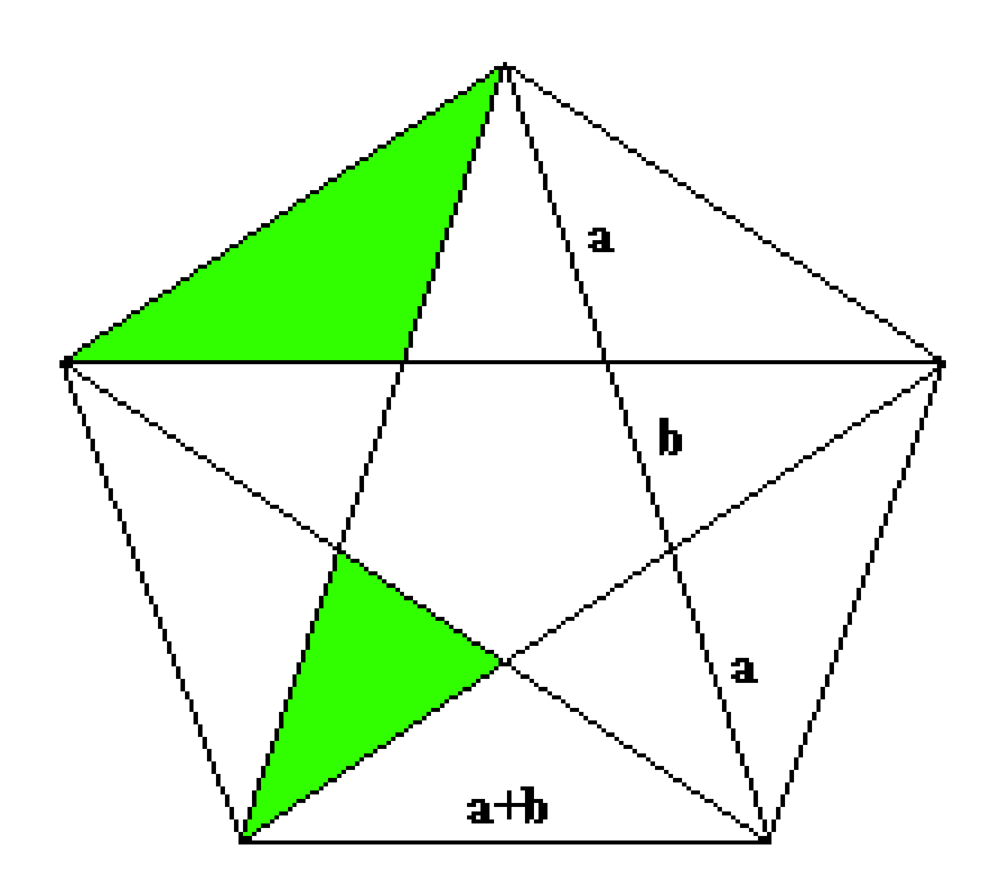
Robert Ammann (1946-1994) était un mathématicien amateur qui apporta des contributions spectaculaires à la théorie des quasi-cristaux et des pavages non-périodiques.

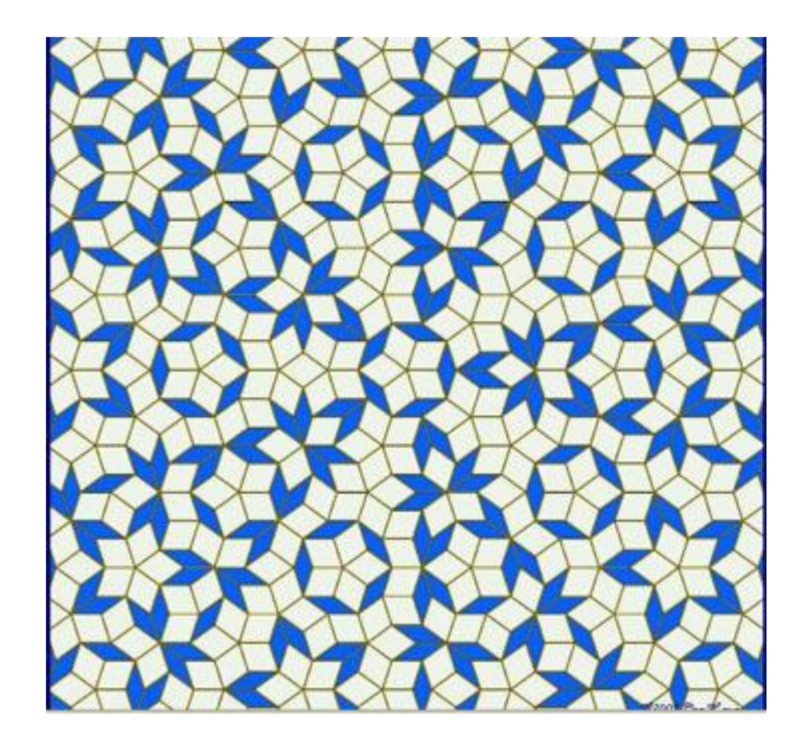
Ammann commença ses études à l'Université de Brandeis (qui est située à 20 kilomètres de Boston), mais le plus souvent il n'assistait pas aux cours et il finit par abandonner ses études. Il travailla alors comme programmeur pour la firme Honeywell. Licencié ensuite par Honeywell, Ammann trouva un emploi dans un centre de tri postal.

En 1975, Ammann lut l'annonce par Martin Gardner d'une découverte faite par Roger Penrose. Penrose avait découvert un pavage non-périodique du plan obtenu en utilisant seulement deux losanges. Penrose ne voulait pas publier avant de prendre un brevet sur son invention, de sorte que la description de Gardner était volontairement vague. Ammann envoya une lettre à Gardner en y décrivant son propre travail qui fournissait la même construction que l'un des pavages de Penrose. D'autres lettres suivrent et Ammann devint un correspondant de nombreux mathématiciens professionnels.

Ammann découvrit de nombreux pavages non-périodiques. La découverte des quasi-cristaux en 1982 révolutionna le statut des pavages non-périodiques et les travaux d'Ammann cessèrent d'être de simples récréations mathématiques. Ammann accepta de rencontrer des mathématiciens professionnels et finalement participa à des congrès. Amann mourut d'une crise cardiaque quelques années plus tard. La nouvelle de son décès passa complètement inaperçue.

5. Le pentagone régulier et le pavage de Penrose



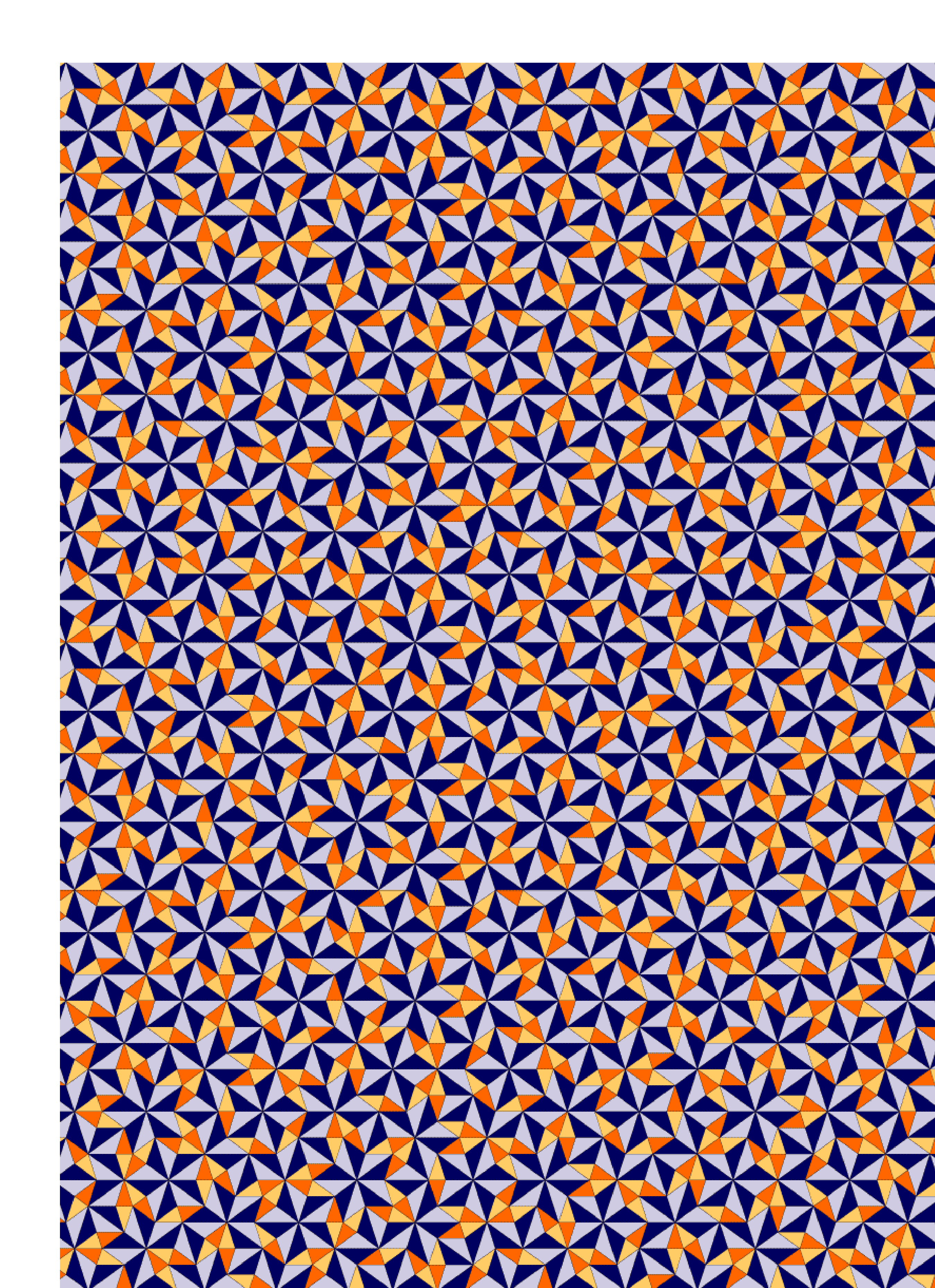


Penrose, Roger (1974)

Role of aesthetics in pure and applied research.

Deux types de losanges sont utilisés : les blancs (nommés B) et les bleus (nommés A). Le pavage est invariant par rotation de $2\pi/5$ de sorte que les angles aux sommets de B valent $2\pi/5$ et $3\pi/5$. De même les angles aux sommets de A valent $\pi/5$ et $4\pi/5$.

On découpe chaque losange B en deux triangles égaux dont la base commune est la "grande diagonale" de B. Tous ces triangles obtus seront affectés du label B. On découpe chaque losange A en utilisant cette fois la "petite diagonale" et l'on obtient deux triangles égaux (qui sont aigus et seront affectés du label A).



Les pavages auto-similaires $\mathcal{P} \in \mathcal{R}$ du plan que nous allons construire sont obtenus en utilisant ces deux triangles comme proto-tuiles. On retrouve le pavage de Penrose en effaçant certaines frontières entre les triangles de l'un des pavages $\mathcal{P}_0$ de cette famille. Cette construction est due à John H. Conway, Roger Penrose et Rafael Robinson. Elle permet de construire une infinité non dénombrable de pavages apparentés au pavage de Penrose. Cela vient de ce qu'il y a deux façons de découper les triangles A. Le découpage indiqué sur la figure s'appelle le découpage droit ; il part de l'extrémité droite de la base de A. Le découpage gauche conviendrait aussi bien.

le triangle A

$\pi/5$

1

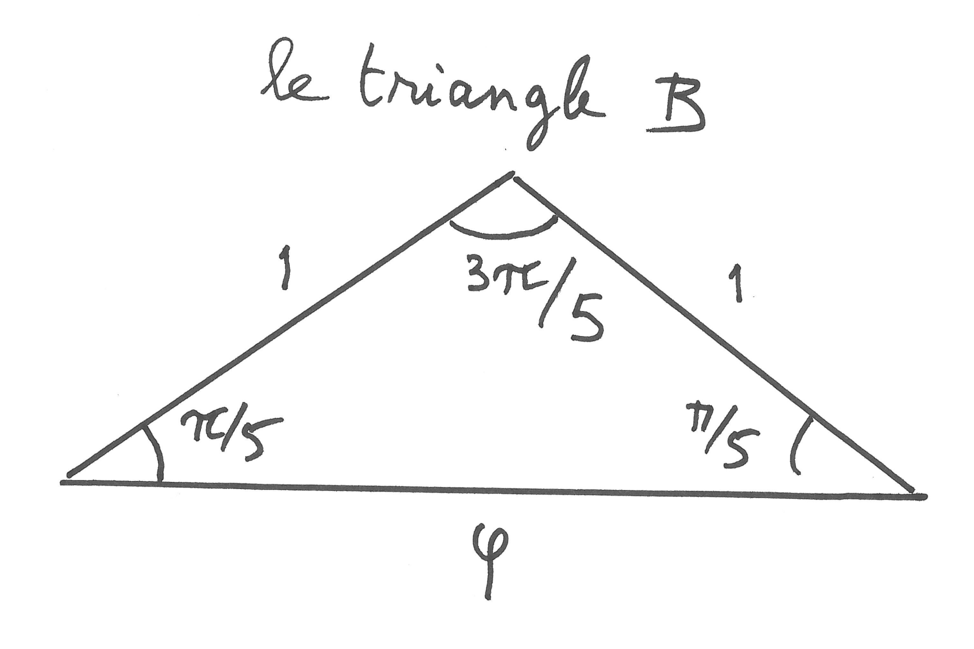
1

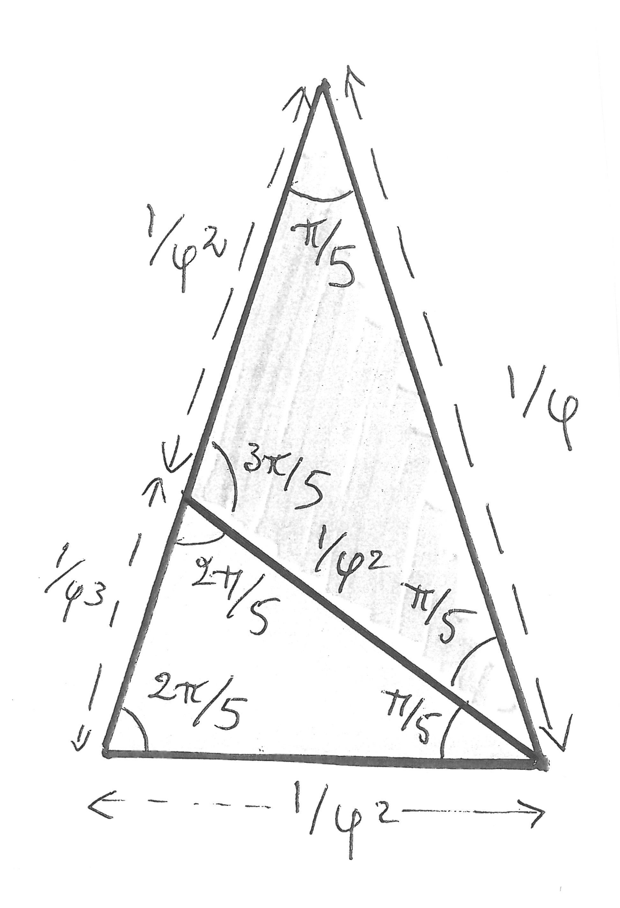
$2\pi/5$

$2\pi/5$

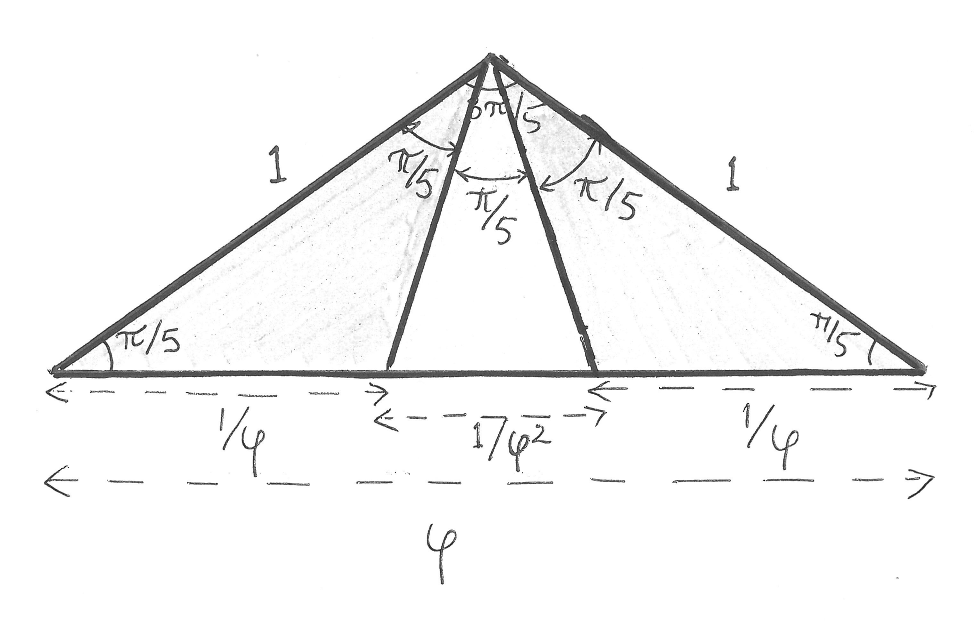
$1/\varphi$

le triangle B

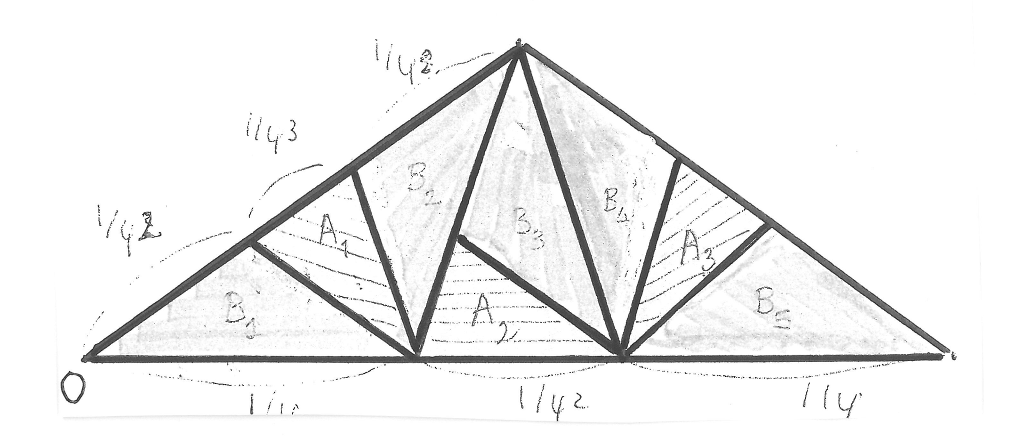




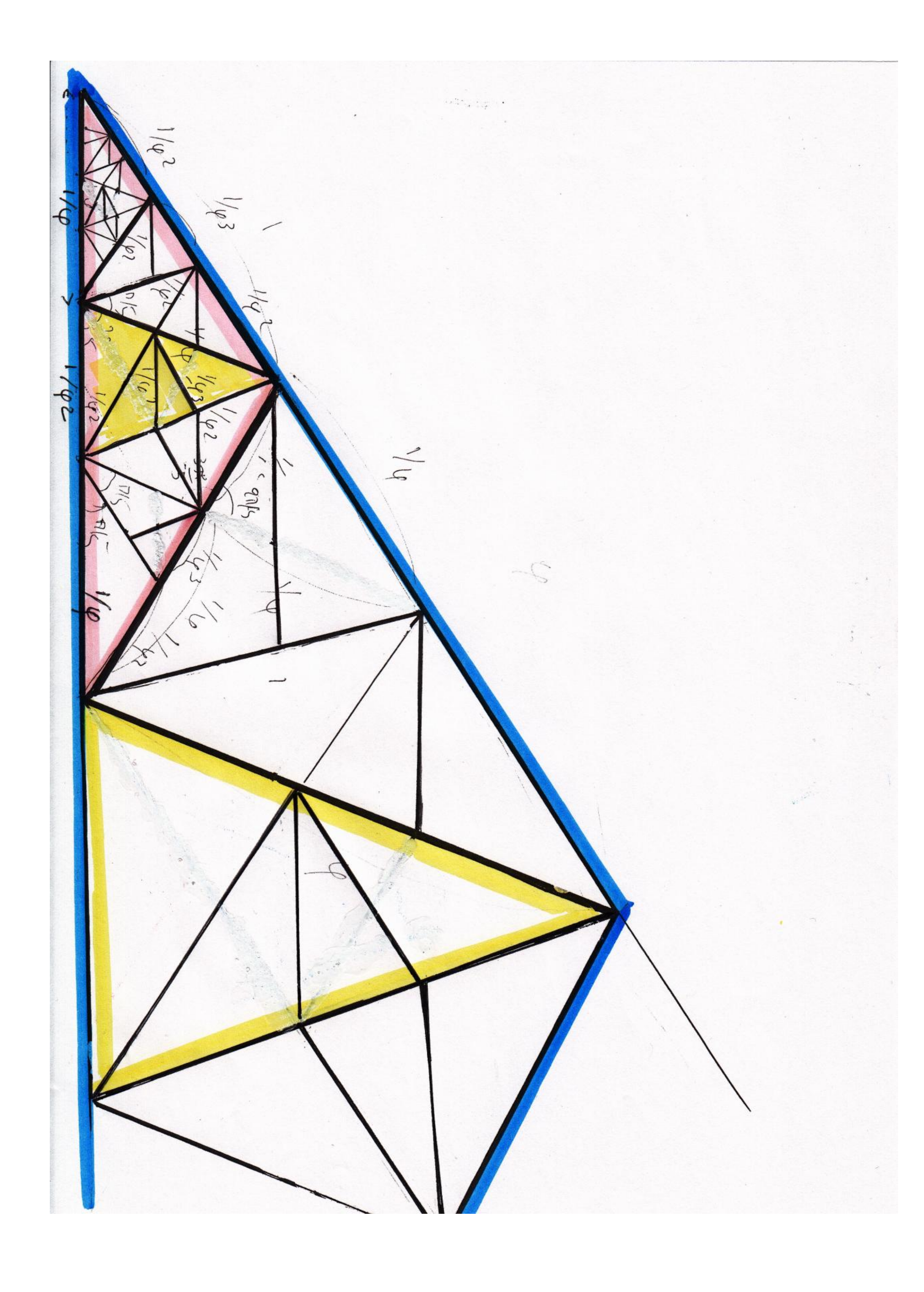
$1/\varphi^2$
$\pi/5$
$1/\varphi$
$3\pi/5$
$1/\varphi^3$
$1/\varphi^2$
$2\pi/5$
$\pi/5$
$2\pi/5$
$\pi/5$
$1/\varphi^2$

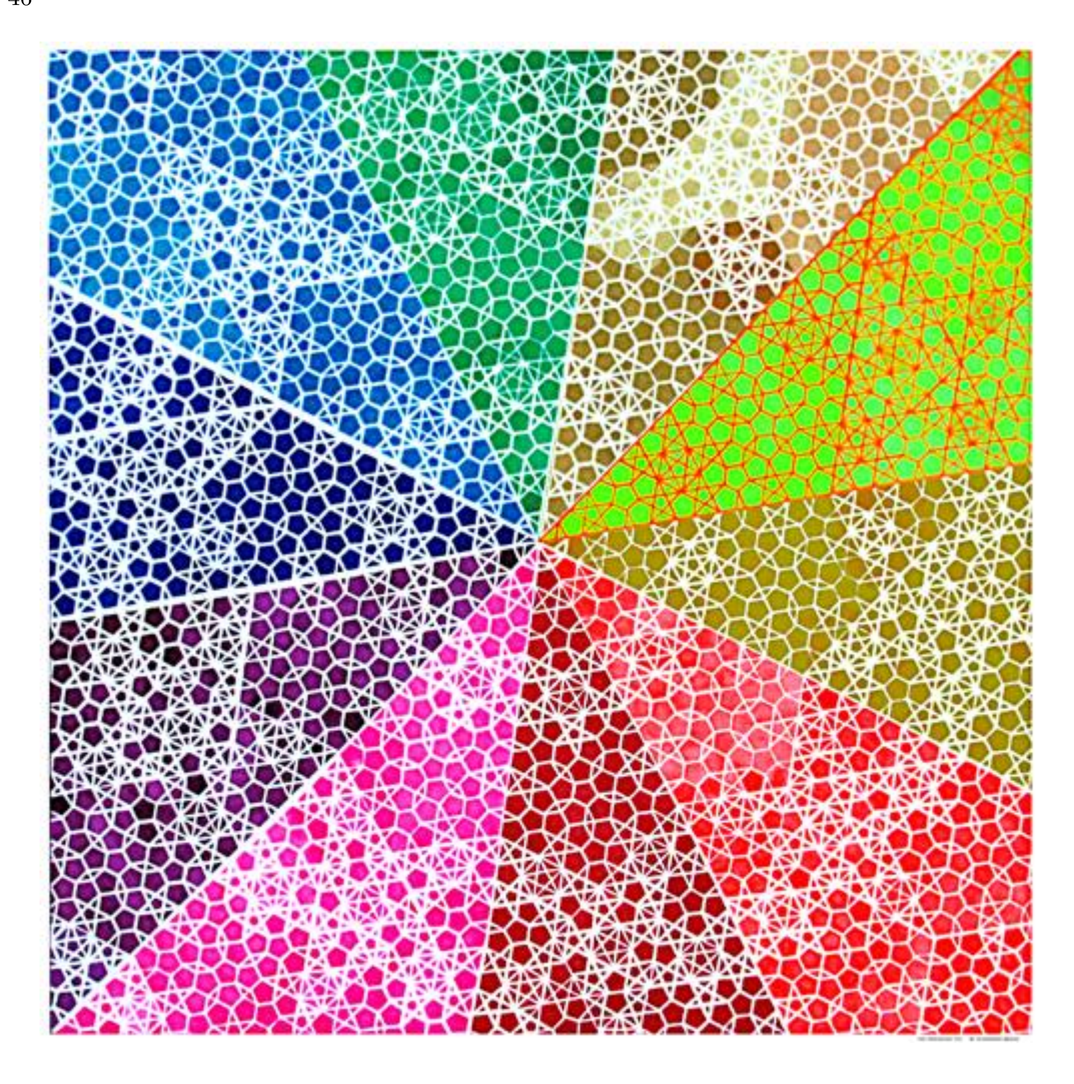


1
$3\pi/5$
$\pi/5$
$\pi/5$
$\pi/5$
1
$\pi/5$
$\pi/5$
$1/\varphi$
$1/\varphi^2$
$1/\varphi$
φ



1/42
1/43
1/42
B1
A1
B2
B3
A2
B4
A3
B5
0
1/42
1/4


1/φ
1/φ²
1/φ
1/φ³
φ



Alexander Braun

Voici le “mode d’emploi” de cette construction. On désigne par ϕ le nombre d’or. La base horizontale du triangle obtus B de départ est, par hypothèse, l’intervalle $[0, \phi]$ de l’axe réel (les deux autres côtés de B valent alors 1). Au bout de N découpages on obtient un émiettement du triangle B de départ en p_N triangles isométriques à $\phi^{-2N}A$ et q_N triangles isométriques à $\phi^{-2N}B$. Les bases de ces triangles isocèles sont parallèles aux côtés du pentagone régulier. On effectue ensuite une homothétie ayant pour centre 0 et pour rapport ϕ^{2N}. On obtient ainsi un recouvrement $\mathcal{P}_N$ de S_N par des triangles isométriques à A ou B. On désigne par S le secteur angulaire défini par $S = 0 \leq \theta \leq \pi/5$ et l’on a $S_N \subset S_{N+1} \subset \ldots \subset S$.

Par passage à la limite on obtient une partition $\mathcal{P}_\infty$ de tout le secteur angulaire $0 \leq \theta \leq \pi/5$ par des triangles égaux à A ou B. En effectuant une symétrie par rapport à l'axe horizontal on prolonge cette partition en une partition du secteur angulaire double défini par $0 \leq |\theta| \leq \pi/5$. On complète cette partition en un pavage du plan en effectuant les quatre rotations d'angles

$$2\pi/5,\ 4\pi/5,\ 6\pi/5,\ 8\pi/5.$$

On obtient ainsi un pavage de la famille du pavage de Penrose.

Cette construction du page de Penrose permet de démontrer le théorème suivant:

Théorème 5.1. *Il existe un pavage $\mathcal{P}$ du plan ayant les propriétés suivantes:*

(a) *les tuiles composant $\mathcal{P}$ sont des triangles isométriques à A ou à B.*
(b) *$\mathcal{P}$ est invariant par rotation d'angle $2\pi/5$.*
(c) *l'ensemble Λ des sommets de $\mathcal{P}$ n'est pas un quasi-cristal.*

La preuve du théorème repose sur une nouvelle définition de la notion de presque-périodicité pour une mesure de Radon. Nous exposons ceci dans la section suivante.

Voici un résultat plus profond, basé sur la notion de nombres de Perron.

Définition 5. *Un nombre de Perron complexe est un entier algébrique* $\theta \in \mathbb{C}$ *de degré* $n \geq 1$*, vérifiant* $|\theta| > 1$ *et dont les* $n-2$ *conjugués* θ_j *(autres que* θ *et* $\overline{\theta}$*) vérifient*

$$|\theta_j| < |\theta|, \ \ 3 \leq j \leq n.$$

Par exemple $\theta = 2 + i$ est un nombre de Perron. La définition d'un nombre de Perron réel est semblable ; les conditions portent alors sur les $n-1$ conjugués. Les entiers naturels, les nombres de Pisot ou de Salem sont des nombres de Perron. Le théorème qui suit est dû à W.P. Thurston, R. Kenyon et B. Solomyak.

Théorème 5.2. *Soit* $\mathcal{P}$ *un pavage du plan répétitif et de type fini. Soit* θ *un nombre complexe tel que* $|\theta| > 1$ *et que*

$$\theta\mathcal{P} \subset \mathcal{P}.$$

Alors θ *est un nombre de Perron.*

Réciproquement pour tout nombre de Perron θ *il existe un pavage* $\mathcal{P}$ *du plan qui soit répétitif, de type fini et tel que* $\theta\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$*.*

Nous esquissons la preuve en dimension 1 dans le cas du nombre de Perron $\theta = 3 + \sqrt{2}$. Alors on pose $a = 1$, $b = \sqrt{2} - 1$ et l'on a

$$\theta a = 4a + b,\ \theta b = a + 2b$$

ce qui permet un découpage itératif d'intervalles que nous allons décrire maintenant.

Ce découpage produit un ensemble $\mathcal{I}_1$ d'intervalles "bleus" et un ensemble $\mathcal{I}_2$ d'intervalles "rouges".

(a) Tout intervalle bleu $I \in \mathcal{I}_1$ de longueur l donne naissance à cinq intervalles contigus $I_1, \ldots, I_5$ qui forment une partition de I : les intervalles I_1, I_2, I_4 et I_5 ont pour longueur l/θ et seront bleus. L'intervalle I_3 a le même centre que I, a pour longueur longueur $(\sqrt{2} - 1)l/\theta$ et sera rouge.

(b) Tout intervalle rouge $J \in \mathcal{I}_2$ de longueur l donne naissance à trois intervalles J_1, J_2 et J_3. L'intervalle J_2 a pour longueur $(\sqrt{2} + 1)l/\theta$, son centre est celui de J et il sera bleu. Les deux intervalles J_1 et J_3 ont pour longueur l/θ et sont rouges.

Pour construire le "pavage" $\mathcal{P}$ on part de l'intervalle bleu $I = [0, 1]$. On le

décompose itérativement en intervalles bleus et rouges. A la première étape on obtient cinq intervalles (quatre bleus et un rouge), à la seconde étape on obtient 17 intervalles bleus et 6 intervalles rouges. On s'arrête à la $N-$ième étape. Le point essentiel est alors que tous les intervalles bleus de cette $N-$ième étape ont la même longueur $l_N = \theta^{-N}$ et que tous les intervalles rouges ont pour longueur $(\sqrt{2}-1)l_N$. On dilate la figure obtenue dans un rapport θ^N pour passer ensuite à la limite.

L'ensemble Λ des sommets de ce pavage n'est pas un "Meyer set" sinon θ serait un nombre de Pisot ou de Salem. Pour obtenir un pavage autosimilaire du plan il suffit de considérer les rectangles $I \times J$ où I et J sont les intervalles délimités par Λ.

6. Motifs presque-périodiques

Une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ est presque-périodique au sens de Bohr si pour tout nombre positif ε il existe un ensemble de Delaunay Λ_ε tel que pour tout $\tau \in \Lambda_\varepsilon$ on ait

$$(1) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Soit f une fonction presque-périodique. La boule centrée au point x de rayon R est notée $B(x, R)$ et la constante c_n est l'inverse du volume de la boule unité. Alors la limite

$$(2) \qquad \mathcal{M}(f) = \lim_{R \to +\infty} c_n R^{-n} \int_{B(x,R)} f(y)\, dy$$

est atteinte uniformément en x.

Selon Laurent Schwartz, une mesure de Radon μ est presque-périodique si

pour toute fonction continue g à support compact, le produit de convolution $\mu * g$ est une fonction presque-périodique au sens de Bohr. Cette définition est trop exigeante et c'est pourquoi nous avons introduit les *mesures g.a.p.* Commençons par le cas des fonctions.

Définition 6. *Une fonction borélienne f à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction g-a-p si, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions presque-périodiques g_ϵ et h_ϵ telles que*

$$g_\epsilon \leq f \leq h_\epsilon \tag{3}$$

et

$$\mathcal{M}(h_\epsilon - g_\epsilon) \leq \epsilon \tag{4}$$

Une mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^n$ est g-a-p si pour toute fonction continue g à support compact le produit de convolution $\mu * g$ est une fonction g-a-p.

Définition 7. *Un ensemble de points $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est un motif presque-périodique si la mesure de Radon $\sigma_\Lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} \delta_\lambda$ est g-a-p.*

On a alors

Théorème 6.1. *Tout "model set" (ensemble modèle défini ci-dessous) est un motif presque-périodique.*

Dans la définition des "model sets" nous supposons que la fenêtre K est un ensemble compact intégrable au sens de Riemann et il serait intéressant de savoir si cette dernière condition est nécessaire. En général un "Meyer set" n'est pas nécessairement un motif presque-périodique.

Le théorème 6.1 est plus subtil qu'il ne semble : les motifs presque-périodiques ont une structure arithmétique très précise, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 6.2. *Soit* Λ_θ, $\theta > 2$, *l'ensemble de tous les nombres réels qui s'écrivent sous la forme de sommes finies :*

$$\sum_{k\geq 0} \epsilon_k \theta^k, \quad \epsilon_k \in \{0,1\}.$$

Alors Λ_θ *est un motif presque-périodique si et seulement si* θ *est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan.*

Que $\theta > 2$ soit un nombre de Pisot ou non, la densité de Λ_θ est nulle. La réunion $\Lambda_\theta \cup \mathbb{Z}$ donne un exemple d'un ensemble dont la densité uniforme est égale à 1 et qui, selon la nature de θ est ou n'est pas un motif presque périodique.

7. Meyer sets et model sets



Boris Nikolaïevitch Delaunay (Delone),
St.Petersburg 1890- Moscow 1980.

Définition 8. *Un ensemble de Delaunay est défini par les deux conditions suivantes:*

(a) *Il existe un* $\beta > 0$ *tel que* $\forall \lambda \in \Lambda$, $\forall \lambda' \in \Lambda$,

$$\lambda \neq \lambda' \Rightarrow |\lambda' - \lambda| \geq \beta > 0$$

(b) *Il existe un nombre* $\gamma < \infty$ *tel que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \text{distance}(x, \Lambda) = \gamma < \infty$$

Si l'on applique la triangulation de Delaunay à un ensemble de DelaunayΛ, on obtient un pavage du plan à l'aide de triangles dont les sommets sont les points de Λ.

Les "Meyer sets" $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ sont les ensembles de points qui généralisent les réseaux.

Définition 9. *Un "Meyer set" Λ est un ensemble de Delaunay tel que l'on ait*

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$$

où F est un ensemble fini.

Si $F = \{0\}$, Λ est un réseau (comme $\mathbb{Z}^2$). Commençons par un contre-exemple. L'ensemble Λ des sommets du pinwheel tiling n'est pas un "Meyer set" comme on le vérifie sans peine.

J. Lagarias a démontré le théorème suivant :

Théorème 7.1. *Un ensemble de Delaunay Λ est un "Meyer set" si et*

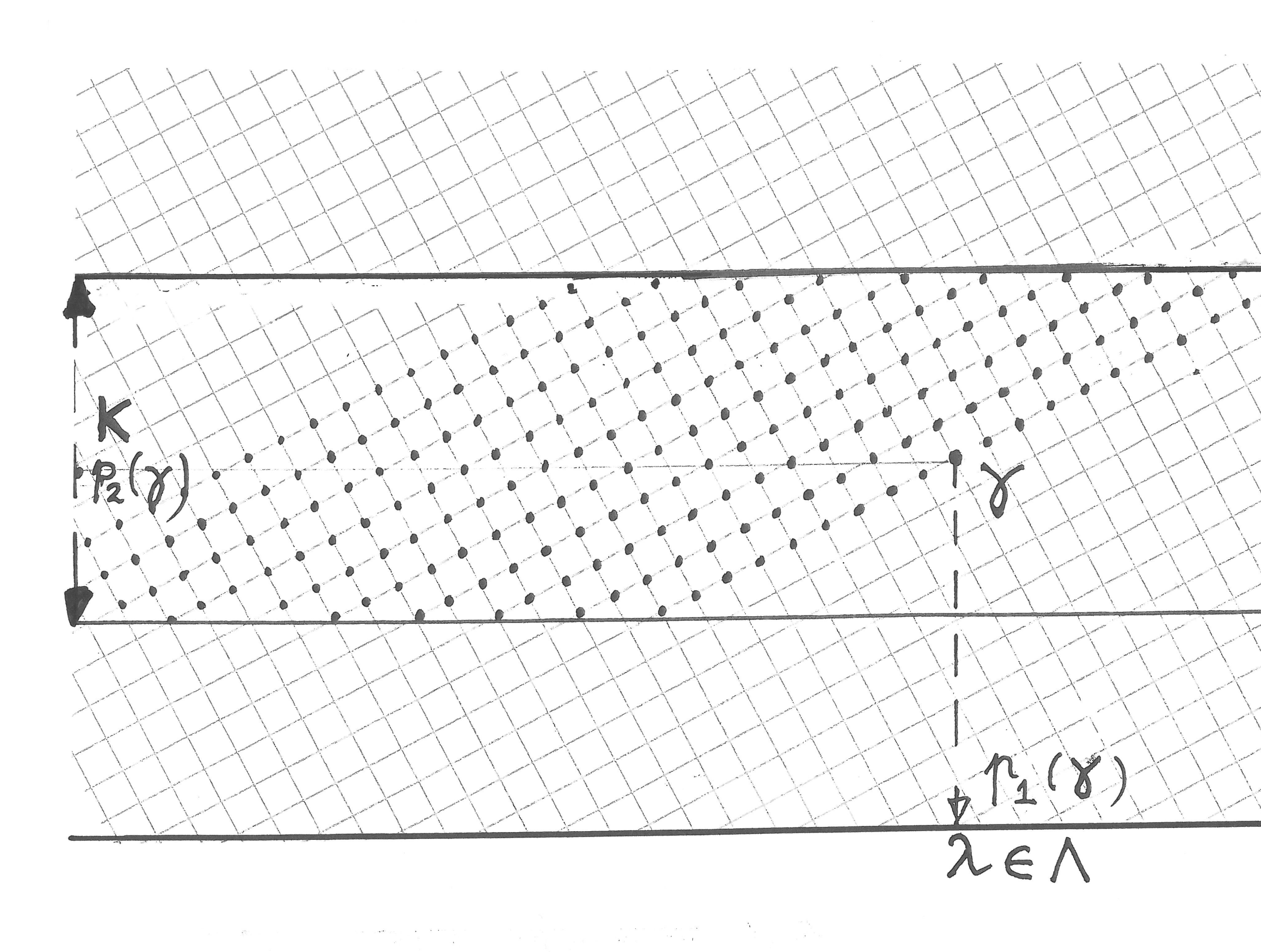
seulement si $\Lambda - \Lambda$ *est également un ensemble de Delaunay.*

L'autosimilarité des Meyer sets est décrite par le théorème suivant:

Théorème 7.2. *Soit* $\theta > 1$ *un nombre réel et* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *un Meyer set. Si l'on a* $\theta\Lambda \subset \Lambda$*, alors* θ *est soit un nombre de Pisot, soit un nombre de Salem.*

Réciproquement, en toute dimension n *et pour tout nombre de Pisot ou de Salem* θ*, il existe un Meyer set* Λ *tel que* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *et* $\theta\Lambda \subset \Lambda$

La définition générale d'un ensemble modèle $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est illustrée par le dessin de la page suivante.



Cut and projection

Γ is a lattice, $\gamma \in \Gamma$

$\gamma = (p_1(\gamma), p_2(\gamma))$

$p_1 : \Gamma \to p_1(\Gamma)$ is one-to-one

$p_2(\Gamma)$ is dense in $\mathbb{R}$

$\Lambda = \{p_1(\gamma);\ \gamma \in \Gamma,\ p_2(\gamma) \in K\}$.

Un réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ est un sous-groupe discret à quotient compact. En d'autres termes $\Gamma = A(\mathbb{Z}^N)$ où A est une matrice inversible $N \times N$. Pour définir un modèle, on fixe un entier $m \geq 1$, on pose $N = n + m$, $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et l'on considère un réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$. Pour $(x, y) = X \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, on pose $x = p_1(X)$ et $y = p_2(X)$.

On suppose que $p_1 : \Gamma \to p_1(\Gamma)$ est une application injective et que $p_2(\Gamma)$ est un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}^m$.

Un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^m$ est intégrable au sens de Riemann si sa frontière est de mesure nulle. La frontière de K est $K \setminus L$ où L est l'intérieur de K. L'intérieur de K est le plus grand ensemble ouvert contenu dans K. Si K est intégrable au sens de Riemann, alors K

est de mesure positive si et seulement si l'intérieur de K n'est pas vide.

Définition 10. *Soit $K \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble compact intégrable au sens de Riemann. Alors l'ensemble modèle Λ défini par Γ et K est construit comme suit*

(5)
$$\Lambda = \{\lambda = p_1(\gamma);\ \gamma \in \Gamma,\ p_2(\gamma) \in K\}$$

Un sous-ensemble Λ de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble modèle si, soit Λ est un réseau ou si l'on peut trouver un entier m, un réseau réseau Γ et un compact K intégrable au sens de Riemann tels que Λ soit le modèle défini par (5)*.*

L'ensemble compact K est *la fenêtre* de l'ensemble modèle Λ.

Voici un exemple. Soit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et considérons le réseau Γ du plan défini comme l'ensemble des $x = (x_1, x_2)$ tels que

(6)

$$x_1 = m+n\varphi, \;\; x_2 = m+n\overline{\varphi}, \;\;\; m, n \in \mathbb{Z}$$

Alors l'ensemble S des nombres réels x_1 tels que $(x_1, x_2) \in \Gamma$, $|x_2| \leq 1$ est un ensemble modèle.

Les ensembles modèles ne sont pas périodiques mais ont suffisamment de presque-périodicité pour avoir une image de diffraction discrète. Cela correspond aux pics de Bragg que l'on observe dans l'image de diffraction aux rayons X des “vrais” quasi-cristaux. (E. Arthur Robinson Jr.)

Théorème 7.3. *Un ensemble modèle est un "Meyer set". En sens inverse si Λ est un "Meyer set", il existe toujours un ensemble modèle M et un ensemble fini F tels que $\Lambda \subset M + F$.*

Lemme 7.1. *Soit ∂K la frontière de K. Alors tout ensemble modèle Λ tel que $\partial K \cap p_2(\Gamma) = \emptyset$ est un ensemble répétitif.*

8. Les nombres de Pisot-Vijayaraghavan et de Salem

Définition 11. *Un nombre de Pisot-Vijayaraghavan est un nombre réel $\theta > 1$ ayant les propriétés suivantes :*

(a) *θ est un entier algébrique de degré $n \geq 1$*

(b) *les* $n-1$ *conjugués* $\theta_2, \ldots, \theta_n$ *de* θ *vérifient*

$$|\theta_2| < 1, \ldots, |\theta_n| < 1. \tag{7}$$

Nous écrirons dans ce qui suit "nombre de Pisot" au lieu de "nombre de Pisot-Vijayaraghavan". Par exemple les entiers naturels $2, 3, \ldots$ sont des nombres de Pisot et la condition (b) est vide dans ce cas. Quand le nombre de Pisot θ n'est pas un entier, son polynôme minimal s'écrit $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ où $a_1 \in \mathbb{Z}, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Alors les conjugués $\theta_2, \ldots, \theta_n$ de θ sont les autres solutions de $P(z) = 0$ et, à ce titre, sont soit réeeles soient complexes. Le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un nombre de Pisot. Le polynôme minimal de φ est $x^2 - x - 1$ et le conjugué de φ est $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Le nombre d'or φ n'est pas

le plus petit nombre de Pisot. Le plus petit nombre de Pisot $\rho = 1.324717\ldots$ est la solution réelle de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$. Les deux autres solutions z_1 et z_2 de cette équation sont complexes. On a $z_1 = \overline{z}_2$ et $z_1 z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1/\rho$ ce qui démontre que ρ est un nombre de Pisot. Raphaël Salem a démontré que l'ensemble S de tous les nombres de Pisot est fermé.

Les nombres de Salem sont définis de façon analogue. La condition (a) est conservée tandis que (b) est remplacée par

$$(8) \qquad |\theta_2| \le 1, \ldots, |\theta_n| \le 1$$

avec, au moins une égalité.

Alors le degré n de θ est pair. Quitte à permuter les conjugués de θ on a $\theta_2 = \frac{1}{\theta}$ et $|\theta_3| = \cdots = |\theta_n| = 1$.

Avant d'énoncer notre résultat principal, commençons par traiter un exemple. Soit φ le nombre d'or et $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers du corps de nombres engendré par θ. . On définit $S \subset \mathcal{O}$ comme l'ensemble des $\beta \in \mathcal{O}$ vérifiant $|\overline{\beta}| \leq 1$. On a alors

$$\varphi S \subset S.$$

C'est évident. Si $\beta \in S$, alors on a $\beta \in \mathcal{O}$ et $|\overline{\beta}| \leq 1$. Ensuite le conjugué du produit $\varphi\beta$ est le produit des conjugués ce qui conclut la preuve.

9. Images de diffraction

Le théorème suivant éclaire le travail de Daniel Shechtman.

Soit Λ un ensemble modèle défini par un réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et une fenêtre $K \subset \mathbb{R}^m$. Soit Γ^* le réseau dual de Γ. Ce réseau dual $\Gamma^* \subset \mathbb{R}^N$ est l'ensemble

des $y \in \mathbb{R}^n$ tels que l'on ait

$$\exp(iy \cdot x) = 1, \forall x \in \Gamma$$

On a évidemment $\Gamma = (\Gamma^*)^*$. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^m$. Supposons que K soit intégrable au sens de Riemann et de mesure positive. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ et supposons que φ s'annule hors de K.

On définit des poids $w(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, sur Λ par

$$w(p_1(\gamma)) = \varphi(p_2(\gamma)), \;\; \gamma \in \Gamma$$

Si φ pouvait être la fonction indicatrice de K on aurait $w(\lambda) = 1$ on Λ.

Avec ces notations on a

Théorème 9.1. *Les poids $w(\lambda)$ sont définis comme ci-dessus. Soit*

$$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} w(\lambda)\delta_\lambda$$

La mesure μ est donc une somme de masses de Dirac sur l'ensemble modèle Λ. Alors la transformée, au sens des distributions, de μ est la mesure atomique ν définie par

$$\nu = \frac{(2\pi)^n}{\operatorname{vol}\Gamma} \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}(-(p_2(\gamma^*))\, \delta_{p_1(\gamma^*)}$$

10. Appendice

Voici les détails de la construction du “pinwheel tiling”.

On part du triangle rectangle T dont les sommets sont (0, 0), (2, 0), et (0, 1). On divise ce triangle rectangle T en cinq morceaux égaux. Ces cinq morceaux

A, B, C, D et E sont isométriques à $5^{-1/2}T$. *Le morceau C sera appelé le cœur de T.* On itère cette décomposition sur chaque morceau A, B, C, D, et E. La suite des cœurs T_j, $j \geq 0$, est définie par récurrence par les conditions: $T_0 = T$, $T_1 = C$ et T_{j+1} est le cœur de T_j. On continue et on itère N fois cette décomposition. Alors T est décomposé en 5^N triangles rectangles égaux entre eux ; ce sont des copies isométriques de $5^{-N/2}T$. Le pavage de T par ces 5^N triangles rectangles est noté $\mathcal{P}_N$. Les cœurs associés T_N tendent vers le point $(1/2, 1/2)$. On appelle σ la similitude de centre $(1/2, 1/2)$, de rapport $\sqrt{5}$ et d'angle arctangent$(1/2)$. En utilisant les nombres complexes on a

$$\sigma(z) = (2+i)z - i.$$

Lemme 10.1. *Avec ces notations on a* $\sigma(T_{N+1}) = T_N$ *et* $\sigma^N(T_N) = T$.

On fait alors un zoom, c-à-d. on dilate la figure en utilisant les similitudes σ^N. Le facteur d'agrandissement est $5^{N/2}$. On a alors évidemment $\sigma^N(T_N) = T$. On obtient ainsi une suite croissante $\sigma^N(\mathcal{P}_N)$ de pavages emboîtés qui convergent vers le pavage en moulin à vent $\mathcal{P}$. Cette magnifique construction est l'œuvre de John Conway et de Charles Radin.

Soit Λ l'ensemble des sommets d'un pavage de Conway-Radin. Un sommet d'un pavage est simplement un sommet d'une des tuiles du pavage. Dans le cas du de Conway-Radin, Λ est un ensemble de Delaunay et nous avons

$$(2+i)\Lambda \subset \Lambda + i$$

Ceci préfigure les propriétés d'autosimilarité des quasi-cristaux. Mais Λ n'est pas de type fini. En effet Charles Radin démontra que l'ensemble des orientations des côtés des triangles composant $\mathcal{P}$ est infini. Cela découle de l'irrationalité de $\text{Arctg}(1/2)/\pi$.

La construction analogue conduisant au pavage de Penrose est due à John H. Conway et Penrose.

References

[1] J-P. Allouche, M. Baake, J. Cassagne, and D. Damanik, *Palindrome complexity.* Theoret. Comput. Sci. **292** (2003) 9-31.

[2] P. Arnoux, V. Berthé, Hiromi Ei and Shunji Ito, *Tilings, quasicrystals, discrete planes, generalized substitutions and multidimensional continued fractions*, Discrete Math. and Theoretical Computer Science Proceedings AA (DM-CCG conference): 59-78 (2001)

[3] M. Baake *Diffraction of weighted lattice subsets.* Preprint (2001)

[4] M. Baake and R. V. Moody, *Diffractive point sets with entropy.* J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 9023-39.

[5] M. Baake, R. V. Moody and P. A. B. Pleasants, *Diffraction from visible lattice points and k-th power free integers.* (1999) Discr. Math.

[6] M. Baake, R. V. Moody and M. Schlottmann, *Limit-(quasi-)periodic point sets as quasicrystals with p-adic internal spaces.* J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 5755-65.

[7] M. Baake and R. V. Moody, *Self-Similar Measures for Quasicrystals.* Directions in Mathematical Quasicrystals eds M. Baake and R. V. Moody, CRM Monograph Series, AMS, Providence, RI (2000).

[8] M. Baake, *A Guide to Mathematical Quasicrystals.* Quasicrystals, eds Suck J-B, Schreiber M and Häu$\beta lerP(Berlin : Springer)$(1998).

[9] M. Baake and R. V. Moody, *Multi-component model sets and invariant densities.* Aperiodic'97 ed Verger-Gaugry J-L, Singapore: World Scientific (1998) 9-20.

[10] E. Bombieri and J.E. Taylor, *Quasicrystals, tilings and algebraic number theory, some preliminary connections.* The legacy of Sonya Kovalevskaya. A.M.S. Contemp. Math. Ser. **84** (1987) 241-264.

[11] A. Córdoba, *La formule sommatoire de Poisson.* C. R. Acad. Sci. Paris **306** (1988) 373-376.

[12] A. Córdoba, *Dirac combs.* Lett. Math. Phys. **17** (1989) 191-196.

[13] M. Duneau, *N-dimensional crystallography and the icosahedral group.* Lectures on quasicrystals, eds. F. Hippert and D. Gratias, Les Editions de Physique, (1994) 153-186.

[14] M. Duneau and A. Katz, *Quasiperiodic patterns.* Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 2688-91.

[15] F. Dyson, *Random matrices, neutron capture levels, quasicrystals, and zeta-function zeros.* Workshop on random matrix theory, Berkeley, California, (2002) Sept. 23.

[16] A. Hof, *On diffraction by aperiodic structures.* Comm. Math. Phys. **169** (1995) 25-43.

[17] Johannes Kellendonk and Lorenzo Sadun, *Meyer sets, topological eigenvalues, and Cantor fiber bundles* (2012).

[18] Richard Kenyon, *On the characterization of expansion maps for self-affine tilings*, with B. Solomyak. To appear.

[19] Richard Kenyon and Boris Solomyak, *On the characterization of expansion maps for self-affine tilings* (2009).

[20] J. C. Lagarias, *Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets.* Comm. Math. Phys. **179** (1996) 365-376.

[21] J. C. Lagarias, *Geometric Models for Quasicrystals I. Delone Sets of Finite Type.* Discrete & Computational Geometry **21** (1999) 161-191.

[22] J. C. Lagarias, *Geometric Models for Quasicrystals II. Local Rules Under Isometries.* Discrete & Computational Geometry **21** (1999) 345-372.

[23] J. C. Lagarias, *Mathematical Quasicrystals and the Problem of Diffraction.* Directions in Mathematical Quasicrystals. CRM Monograph Series **13**, American Mathematical Society, (2000) 61-93.

[24] J. C. Lagarias, P. A. B. Pleasants, *Repetitive Delone Sets and Quasicrystals.* Ergod. Th. Dyn. Sys. **23** (2003) 831-867.

[25] Jeong-Yup Lee, *When do self-affine tilings have the Meyer property?* (2010)

[26] Jeong-Yup Lee and Boris Solomyak, *Pisot family self-affine tilings, discrete spectrum, and the Meyer property* (2010).

[27] B. Matei and Y. Meyer, *Quasicrystals are sets of stable sampling.* Complex Variables and Elliptic Equations **55** (2010) 947-964.

[28] Y. Meyer, *Nombres de Pisot et analyse harmonique*, Proceedings on the International Congress of Mathematicians, Nice, France, (1970) 663-665.

[29] Y. Meyer, *Trois problèmes sur les sommes trigonométriques*, Astérisque 1 (1973), SMF.

[30] Y. Meyer, *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique.* Lecture Notes in Math., **117** (1970) Springer-Verlag.

[31] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic analysis.* (1972), North-Holland.

[32] Y. Meyer, *Quasicrystals, Diophantine Approximation and Algebraic Numbers.* (1972), Beyond Quasicrystals. F. Axel, D. Gratias (eds.) Les Editions de Physique, Springer (1995) 3-16.

[33] Y. Meyer, *Adeles et séries trigonométriques spéciales.* Ann. Math. (2) **97** (1973) 171-186.

[34] R. V. Moody, *Uniform Distribution in Model Sets.* Can. Math. Bull., **45** (No. 1) (2002) 123-130.

[35] R. V. Moody, *Model sets: A Survey.* From Quasicrystals to More Complex Systems, eds. F. Axel, F. Dénoyer, J-P. Gazeau, Centre de physique Les Houches, Springer Verlag, 2000.

[36] R. V. Moody, *Meyer Sets and Their Duals.* The Mathematics of Aperiodic Order, Proceedings of the NATO-Advanced Study Institute on Long-range Aperiodic Order, ed. R.V. Moody, NATO ASI Series C489, Kluwer Acad. Press, 1997, 403-441.

[37] R. V. Moody, *Uniform Distribution in Model Sets.* Can. Math. Bull., **45** (No. 1) (2002) 123-130.

[38] R. V. Moody, *Mathematical quasicrystals: a tale of two topologies.* ICMP (2003). Edited by Jean-Claude Zambrini (University of Lisbon, Portugal), Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006.

[39] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis.* Boston, Heath, (1963).

[40] M. Schlottmann, *Cut-and-Project Sets in Locally Compact Abelian Groups.* Quasicrystals and Discrete Geometry ed Patera J. Fields Institute Monographs, vol. 10 AMS, Providence, RI (1998) 247-264.

[41] M. Schlottmann, *Generalized Model Sets and Dynamical Systems.* Directions in Mathematical Quasicrystals eds Baake M. and Moody R. V. CRM Monograph Series, AMS, Providence, RI (2000).

[42] L. Schwartz, *Théorie des distributions.* Hermann, Paris (1966).

[43] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry.* Cambridge University Press, 1995; paperback edition 1996.

[44] M. Senechal, *What is a quasicrystal?* Notices of the AMS, 886-887, September 2006.

[45] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias and J.W. Cahn, *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry.* Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1951-1953.

[46] Boris Solomyak, *Tilings and Dynamics* (2000).

[47] William Thurston, *Groups, tilings, and finite state automata*, Summer 1989, AMS Colloquium Lectures, Boulder.

[48] N. Wiener, *The Fourier Integral and certain of its applications*, Cambridge University Press (1933).